# 目　　录


**引论　什么是几何？(最后的论述)** ………………… (1)

**第一章　仿射变换和射影变换(仿射和射影)** ……… (10)

1．平面到平面上的平行射影

平面的仿射变换 …………………………… (10)

2．平面到平面上的中心射影

平面的射影变换 …………………………… (25)

3．把一个圆变成一个圆的中心射影

球极平面射影 ……………………………… (68)

4．平面上的配极・对偶原理 ………………… (83)

5．直线和圆的射影变换・直尺作图 ………… (109)

**附录　罗巴切夫斯基-波里亚的非欧几里得**

**几何（双曲几何）** ……………………………… (129)

**解答** …………………………………………………… (171)

# 引　论

## 什么是几何？（最后的论述）

在《几何变换》第一册的引论中，我们曾把几何定义为研究图形在运动下保持不变的那些性质的学科。在《几何变换》第二册的引论中，我们又给几何下了一个新的定义，那就是作为研究图形在相似变换下保持不变的那些性质的学科。自然要问，这两种定义是否完全等价？即它们究竟是同一个学科的不同的定义呢，还是存在两种不同的几何：一种是《几何变换》第一册的引论中讨论的几何，另一种是《几何变换》第二册的引论中所讨论的几何？我们将阐明后一种说法是正确的，即这两种几何是不同的（虽然是密切相关的），并且事实上存在着许多种不同的几何。最有趣的几何之一是罗巴切夫斯基-波里亚（Lobatchevsky-Bolyai）的非欧几何，也就是所谓双曲几何，它跟通常的几何有根本性的差别，在本书末的附录中要讨论这种几何①。

我们在《几何变换》第二册的引论中已经指出，把几何当作研究图形在运动下保持不变的那些性质的早先的定义是不适当的。我们作出这个结论的根据如下：运动是平面上保持任意两点之间距离不变的变换。然而，表示距离的数目却依赖于度量单位的选择。由于一个几何命题不能依赖于

① 也可看U.M. 亚格龙的 Complex Numbers in Geometry (Academic Press, N.Y., 1968)的附录，在那里讨论了八种平面非欧几何，其中包括双曲几何。

长度单位的选择，因此几何定理应当只涉及线段的长度之比，而不是线段的长度。换一种说法，就是在几何中对相似的图形应当不加区别。明确地说，就是如果一个定理关于某个图形是真的，则对于任何一个与它相似的图形也是真的。

虽然这个论点对初等几何的所有定理成立，但是它对于，例如，所有的几何作图并不成立。如果在某一几何作图中我们给定了一个线段的长度，则这个长度不是用一个数，而是用给定一个线段的方式给出的。例如，假若我们要作一个三角形 $ABC$，它的两边 $AC$ 和 $AB$ 以及中线 $CD$ 的长度是给定的，这意思就是我们给定了与 $AC,AB,CD$ 全等的线段(图1)。在这里所给出的是线段长度而不是这种长度的比值，这就意味着不是所有的相似三角形都能看成可接受的解；如果这些三角形中有一个是我们问题的解，则其它(不跟它全等)的三角形就不是解。我们看到，在《几何变换》第二册的引论中所给出的几何定义，一方面适用于初等几何的所有定理，另一方面却不能说它适用于所有的作图问题（这些问题实质上是建立在早先的《几何变换》第一册的引论中所讲的几何定义的基础之上的)。基谢廖夫（Kiselyov）的教科书①的内容既然以《几何变换》第一册的引论中的定义为基础，自然也就要从讨论三角形全等

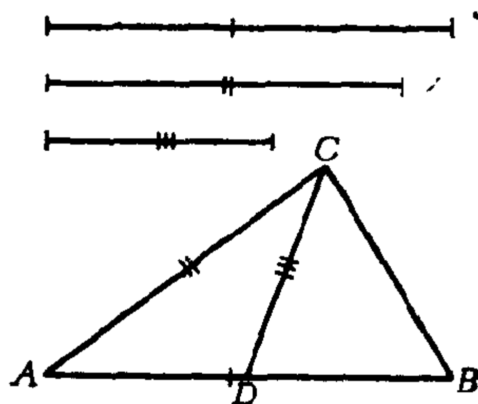


图 1

① 这是标准的苏联几何教科书。——英译者

的定理开始；如果我们对相似三角形不加区别，这类定理就会变成沒有对象的空论，因为在那时全等概念将失去意义。

这样，我们可以得出结论：在《几何变换》第一册和第二册的引论中定义的两类几何是不同的。此外，在第二种几何（自然称为相似几何）中图形的所有性质，也是图形在第一种几何（运动几何）中的性质；实际上，图形在相似变换下保持不变的每个性质在运动下必然也保持不变。这句话反过来不成立；在运动几何中比在相似几何中有更多的性质（在运动几何中，一个图形的两点之间的距离反映了它的一个几何特性，而在相似几何中只有距离之比有意义。）这就是在相似几何中的作图问题比运动几何中的作图问题要少得多的原因①。

回忆一下我们是如何得到前面的两个定义的。我们把运动几何定义为研究图形在运动下保持不变的那些性质的学科；换一种说法，就是在这种几何中我们把经过运动能够彼此叠合的两个图形，也就是把两个全等的图形看成是不可区别的。我们把相似几何定义为研究图形在相似变换下保持不变的那些性质的学科；换句话说，在这种几何中，我们认为两个图形是不可区别的，如果用相似变换能够将其中的一个图形变成另一个图形；简单地说，在这里用“相似变换”代替了上面的“全等”。按照这种思想，我们定义两个图形对于确定的一类变换是等价的，如果在这类变换中有一个变换

① 在相似几何中，只有用角度以及距离之比所描述的性质才是图形的与度量有关的几何性质。所以在这种几何中的作图问题，只能是包含图形的直线间的某些夹角、和它的点之间距离的比值那样一类问题。例如，给定角 $A$ 及其平分角线的长度与自顶点 $B$ 所作的高之比，求作三角形 $ABC$。要解这个问题，就是要找在一个顶点具有给定角，并且其角平分线和另一个顶点的高有给定比的相似三角形中的任何一个三角形。

把其中的一个图形变成另一个图形①．与这个变换类相对应的几何，就定义为研究图形在这类变换下保持不变的那些性质的学科。

现在我们接近于最终回答什么是几何这个问题了．要给出几何（更确切些，是全部不同的几何）的一个完整的定义，我们还需要说明对于规定一种特定的几何变换类应当加上哪些限制（如果需要加某些限制的话）。

加一定的限制的必要性是相当明显的．例如，假定我们试图定义“反射几何”为研究图形在对于直线的反射下保持不变的那些性质，且仅仅是那些性质．在这种假设的几何中，关于直线 $l$ 对称的两个图形 $F$ 和 $F'$（图2）将属于同一个类，并且由于 $F''$ 关于直线 $m$ 与 $F$ 对称，$F$ 和 $F''$ 也将属于同一个类；然而 $F'$ 和 $F''$ 关于任何直线都不对称②．这样，在我们假设的几何中不能引进一种有效的等价类的集合；$F'$ 和 $F''$ 虽然都与 $F$ 属于同一个类，但它们却不在同一个类中！

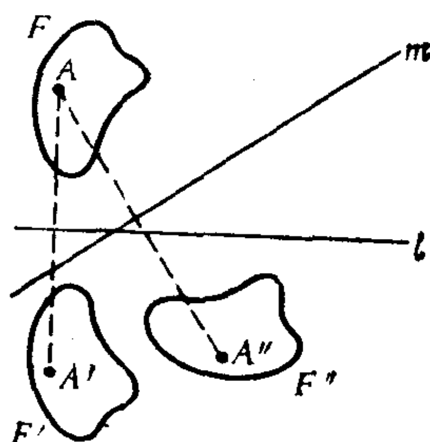


图 2

为了看出应当把什么样的限制加到作为一种几何的基础的变换类上面，我们更严格地来考虑图形的等价关系。

根据我们在数学、其它学科和日常生活中关于等价关系

① 在后面我们要引进比由相似变换所构成的类更为一般的变换类。

② 例如，这是由于这样的事实：关于一条直线对称的两个图形总是反向全等的，而图形 $F'$ 和 $F''$ 却是正向全等的（参看《几何变换》第二册）．

的经验，图形的等价关系必须满足下列要求：

1. 每个图形同它自己等价。

2. 如果图形 $F$ 等价于图形 $F'$，那末反过来 $F'$ 等价于 $F$。

3. 如果图形 $F$ 等价于图形 $F_1$，$F_1$ 又等价于图形 $F'$，则 $F$ 等价于 $F'$。

如果我们的变换类 $G$ 具有下列性质，上面这些要求肯定能够满足：

1. $G$ 包含恒同变换(即保持每个图形逐点固定的变换)。

2. 如果 $G$ 包含把图形 $F$ 变成图形 $F'$ 的变换 $\Pi$，则 $G$ 必定也包含把 $F'$ 变成 $F$ 的变换 $P$（称为 $\Pi$ 的逆变换）[图3(a)]。

3. 如果 $G$ 包含把图形 $F$ 变成图形 $F_1$ 的变换 $\Pi_1$ 和把 $F_1$ 变成图形 $F'$ 的变换 $\Pi_2$，则 $G$ 必定也包含把 $F$ 变成 $F'$ 的变换 $\Pi_3$（它称为两个变换 $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$ 的"乘积"①）[图3(b)]。

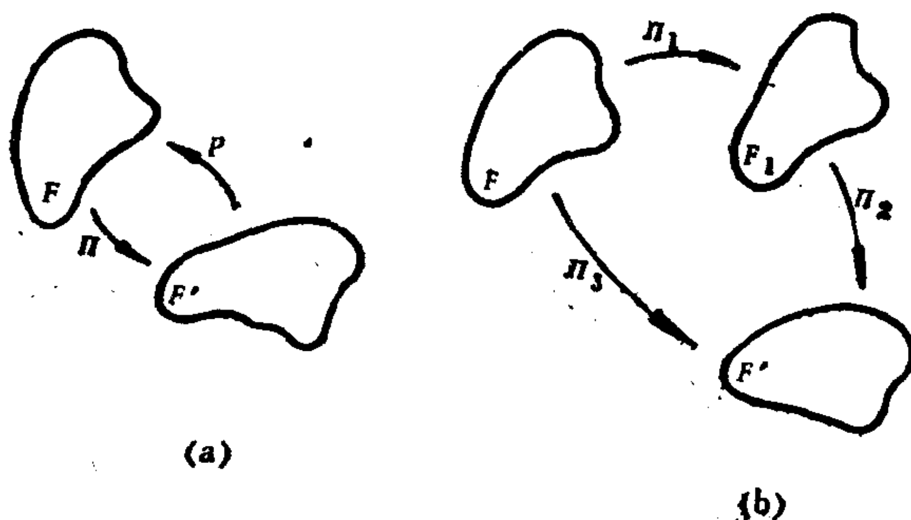



图 3

① $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$ 的这个复合 $\Pi_3=\Pi_2\cdot\Pi_1$，$\Pi_3(F)=\Pi_2[\Pi_1(F)]$，通常称为 $\Pi_1$ 和 $\Pi_2$ 的"乘积"，但是在《几何变换》第一、二册中把它叫做"和"。参看《几何变换》第二册，第一章，§1中的英译者注。

具有性质1—3的变换类$G$称为一个变换群。例如，所有的运动构成一个群，同样地，所有的相似变换也构成一个群。平面上绕一个定点$O$的所有的旋转也构成一个群。事实上，

1. 恒同变换是绕$O$点转$0°$（或$360°$的任意倍数）的旋转；

2. 绕$O$点转$\alpha$角的旋转的逆，是绕$O$点按反方向转过同一角度$\alpha$的旋转；

3. 绕$O$点转$\alpha$角的旋转与绕$O$点转$\beta$角的旋转的乘积，是绕$O$点转$\alpha+\beta$角的旋转。

跟绕一点的旋转相反，平面上所有旋转所构成的类不成为一个群；两个旋转的乘积可以变成一个平移而不再是一个旋转（参看《几何变换》第一册，第一章，§2）。平面上所有对直线的反射也不构成一个群；因为群的定义中的条件3和1都不能满足（两个反射的乘积一般不是关于一条直线的反射，参看《几何变换》第一册，第二章，§1；恒同变换不能表示为对于一条直线的反射）。

现在我们能够叙述几何的定义如下：*几何是研究图形在一个变换群的变换下保持不变的那些性质的一门学科*。这个定义强调了有许多种几何，而不是只有一种几何，并且说明为了要得到一种几何，只需要选择一个变换群就够了。在中学里学习过的运动几何和相似几何就是两个例子。在本书的附录里我们将要证明，双曲几何也能够看成在这种新的意义下的几何。

把几何定义为研究图形在属于一个特定的群的变换下保持不变的那些性质的学科，应归之于德国数学家F.克莱因(Klein)。虽然这不是最一般的定义（它不包括几何的某些

重要领域)，但已经证明是非常有用的，并且在科学的发展中起了重要的作用。特别，变换群的概念现在已成为近代数学中最重要的概念之一①。

初等平面几何所关心的大部分是由直线和圆所组成的图形。能够证明(参看《几何变换》第二册，第一章，§2)，相似变换可以定义为平面的把直线变成直线、圆变成圆的变换。平面的保持直线（即直线变成直线)、但不一定保持圆的变换，通常叫做仿射变换或仿射，它们构成一个群②，这是仿射几何的基础。射影平面（参看第一章，§2）的保持直线、但不一定保持圆的变换（参看第65页中的注①)。通常称为射影变换或射影也构成一个群，它是射影几何的基础③。平面的保持圆（直线可以看成半径是无穷大的圆）的变换叫做圆变换，同样构成一个群，它是反演几何的基础④。

本书虽然讲述仿射变换和射影变换，但并不是把它作为

---

① 关于群论的两本极好的初等的引论是：P.S. Alexandroff, An Introduction to the Theory of Groups, Hafner Publishing Co., New York, 1959，及I.格拉斯曼和W.迈格努斯的《群和它的图象表示》（胡复，唐松译，科学普及出版社，1981.——中译者）.

② 显然，如果一个变换$\Pi$把直线变成直线，则其逆变换也把直线变成直线；如果两个变换$\Pi_1$和$\Pi_2$都把直线变成直线，则它们的乘积也是如此；恒同变换总是保持直线，所以平面上保持直线的变换构成一个群.

③ 射影几何一般是在大学里教授的。关于这个学科有两本（英文的）引论性的书：H.S.M.Coxeter, Projective Geometry, Blaisdell Publ. Co., New York, 1964，和A.Seidenberg, Lectures in Projective Geometry, D. Van Norstrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1962.（有关射影几何的中文教材，较简单的有：《空间解析几何引论》（下册）南开大学数学系，人民教育出版社，1978；《解析几何学》（第二卷）裘光明编，高等教育出版社，1960.较详细的有：《解析几何学》（第二卷）Б.Н.狄隆涅，Д.А.拉伊可夫著，陈鶴，周学光，裘光明等译，高等教育出版社，1957.——中译者）

④ 参看A.Tuller, A Modern Introduction to Geometries, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1967.

一本学习重要而有趣的仿射几何和射影几何的入门书来写的，本书的目的是要表明（即使我们不超出初等几何的范围）各种不同的几何的存在。知道这一点可能是很有用的。譬如说，如果我们断定某一个定理实质上是射影几何的定理（即这个定理是关于在射影变换下保持不变的性质的），那末我们常常能够简化它的证明。例如，假设我们要证明三条直线 $l_1, l_2, l_3$ 共点。如果我们对定理中的图形作一个射影变换，这时直线 $l_1, l_2, l_3$ 分别变成直线 $l'_1, l'_2, l'_3$，则它们共点的充分必要条件是 $l_1, l_2, l_3$ 是共点的。于是可能出现这样的情况：通过巧妙地选择这个射影变换，可使得直线 $l'_1, l'_2, l'_3$ 的共点性比原来直线 $l_1, l_2, l_3$ 的共点性要容易证明。这种证明方法，在本书中将用许多各式各样的例子给以说明。

我们提醒读者注意，在解本书中的问题时所用的方法，同在《几何变换》第一、二册中所用的方法有些差别。在那里我们用运动和相似变换对问题中图形的一个确定的部分作变换，而在本书中则将经常是对问题中的整个图形作变换。引起方法上的这种差异的原因是清楚的。一个运动施行于作为一个整体的图形上将保持这个图形不变（在初等几何中我们对只有位置差异的图形不加区别），因此问题并没有简化。但是，在证明初等几何的一个定理，而这个定理实质上是射影几何或反演几何的一个定理时，我们可以发现对这个问题中的整个图形作变换会是相当有益的。

正如解本书中的问题所用的方法与在《几何变换》第一、二册中所用的方法有些不同一样，问题的性质也有些不同。在《几何变换》第一、二册中，往往要求读者给出各种作图，而在本书中通常则是要求去证明定理。但是，应当指出，即使在解作图问题时，如同下面三个有趣的问题所表明

的那样，射影变换或反演有时也是有用的。

(a) 在一个给定的圆中内接一个 $n$ 角形，它的边要经过平面上给定的 $n$ 个点(参看第120页，§5中的问题84(a))。

(b) 作给定圆的外切 $n$ 角形，它的顶点要在给定的 $n$ 条直线上（参看第120页，§5中的问题84(b))。

(c) 在给定的一个 $n$ 角形中内接另一个 $n$ 角形，它的边要经过平面上给定的 $n$ 个点（参看第124页，§5中的问题90)。

要解上面的第一个问题而不用射影变换或圆变换，将是非常复杂的①。至于第二和第三个问题，还不知道有不用这类变换的简单解法。

最后，我们注意，运用射影变换和圆变换使我们能够解决可能的直尺作图问题（参看§5）和可能的圆规作图（参看第二章②）问题。

---

① 例如，参看 L.I.Golovina 和 U.M.Yaglom, Introduction in Geometry, D.C.Heath and Co., Boston, 1963, pp. 49—52.

② 参考《几何变换》第四册。——英译者

# 第一章　仿射变换和射影变换

## （仿射和射影）

### 1.　平面到平面上的平行射影

### 平面的仿射变换

设$\pi$和$\pi'$是两个不同的（平行或相交的）平面。所谓$\pi$到$\pi'$上沿方向$a$的平行射影，指的是从$\pi$到$\pi'$上的一个映射，它使得平面$\pi$上的每一个点$P$对应于平面$\pi'$上的点$P'$，$P'$

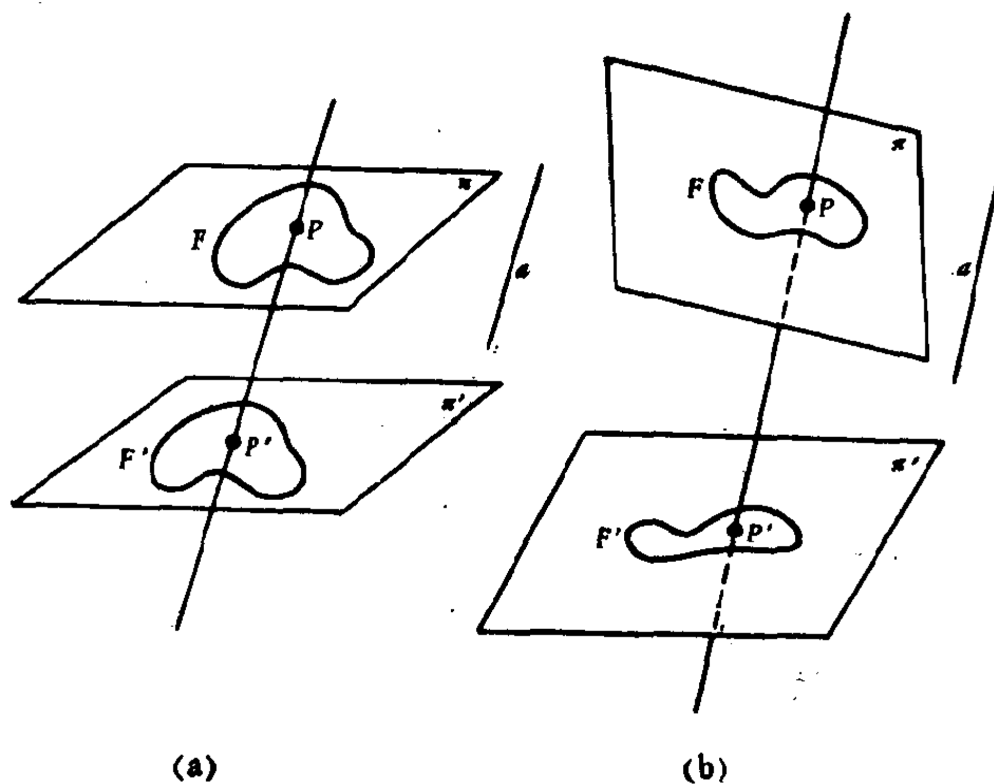



图　4

在经过$P$平行于给定直线$a$的直线上[图4(a),(b)][1]. 这种映射把平面$\pi$上的每个图形$F$变成平面$\pi'$上的某个图形$F'$. 在日光照射下窗户在地板上的影子(图5)可以看成窗户经过平行投影的结果[2].

如果平面$\pi$和$\pi'$平行，则平行射影把$\pi$上的图形变成$\pi'$上的一个全等的图形(这时平行射影就是空间沿直线$a$的



图 5

① 显然，确定平面$\pi$到平面$\pi'$上的平行射影的直线$a$必须不平行于$\pi$和$\pi'$. 以后我们总假定满足这个要求。

② 由于从地面到太阳的距离很远，我们可以假定它的光线是平行的。

方向的平移；参看图4(a)[①]）。如果$\pi$和$\pi'$不平行，则平行射影改变图形的形态(参看图4(b)；我们可以注意在早晨和傍晚物体和它的影子的形状会有多么大的差异)。

有时，不去直接考虑给定的图形，而去考虑它在适当的平行射影下的象，可能会使几何问题的解得到简化。本节专门讨论这种解题的方法。但是，我们必须首先研究平行射影的基本性质。

A．**平行射影把$\pi$上的直线映射成$\pi'$上的直线。**实际上，通过平面$\pi$的直线$l$上的点且平行于$a$的直线构成一张平面$\sigma$(经过$l$且平行于$a$)。由此，$l$在上述平行射影下的象就是平面$\sigma$同$\pi'$的交线$l'$(图6)。反之，$\pi'$上的每一条直线都是$\pi$上某一直线的象。

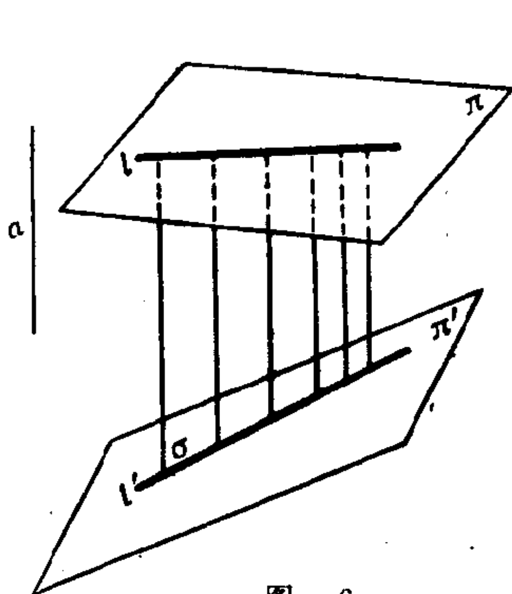


图 6

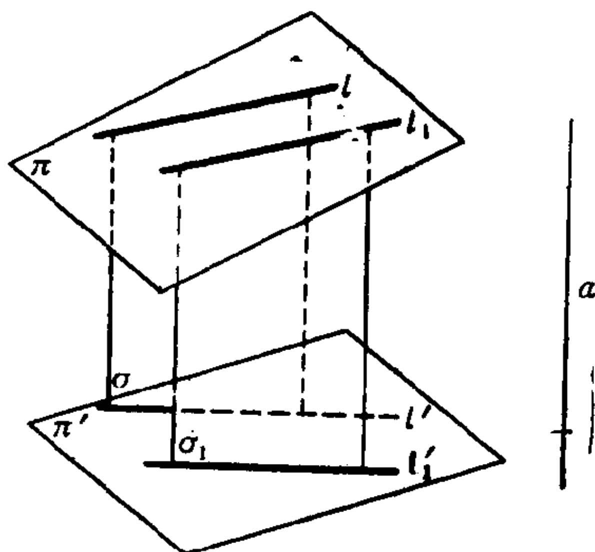


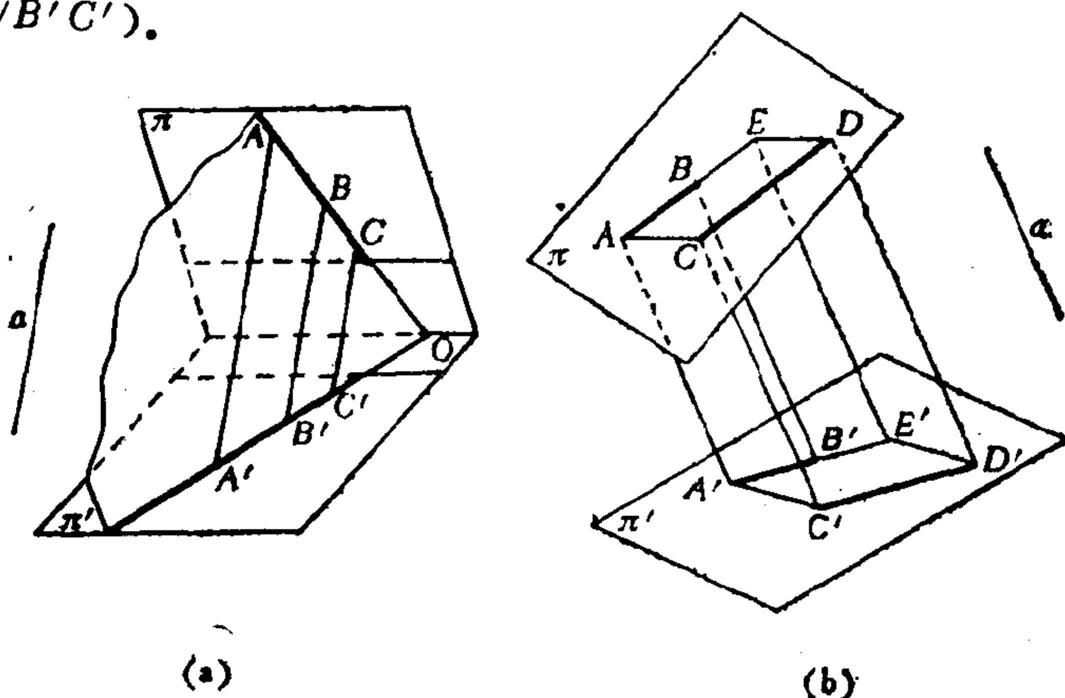
图 7

B．**平行射影把平行直线变成平行直线。**实际上，如果$\pi$上的直线$l$和$l_1$平行，则与$a$平行且分别通过$l$和$l_1$的平面$\sigma$和$\sigma_1$平行，从而平面$\sigma$和$\sigma_1$同$\pi'$的交线$l'$和$l'_1$也平行(图7)。

---

① 用类似于定义平面上的平移的方式定义空间中的平移(参看《几何变换》第一册，第一章，§1)。

C. **平行射影保持两条共线的线段的长度之比不变。**这是下述定理的直接推论：与一个角的两边相交的平行线在这两边上截得成比例的线段(参看图 8(a)，其中$AB/BC = A'B'/B'C'$)。




(a)　　　　(b)

图 8

平行射影也保持平行线上两个线段的长度之比不变。实际上，设 $AB$ 和 $CD$ 是平面 $\pi$ 上的两个线段，$AB \parallel CD$，命 $E$ 是直线 $AB$ 上的点，使得 $ED \parallel AC$[图8(b)]。平行射影把平行四边形 $ACDE$ 变成平行四边形 $A'C'D'E'$(因为线段 $AB$变成线段 $A'B'$，且平行线变成平行线)，因此(考虑到平行射影保持两个共线线段的长度之比不变)我们有

$$\frac{CD}{AB} = \frac{AE}{AB} = \frac{A'E'}{A'B'} = \frac{C'D'}{A'B'}.$$

D. **平行射影保持平面上两个图形的面积之比不变。**为证明这个结论，在平面 $\pi$ 上画全等的正方形网格。性质 B 和 C 意味着平行射影把这个正方形网格变成 $\pi'$ 上的全等平行四边形的网格(图 9)。设 $F_1$和 $F_2$ 是 $\pi$ 上的两个图形，并设 $F'_1$ 和$F'_2$ 表示在平行射影下它们在$\pi'$ 上的象。如果正方形网

格充分细，则在 $F_1$ 内部的正方形的个数与在 $F_2$ 内部的正方形的个数之比跟图形 $F_1$ 和 $F_2$ 的面积之比 $S_1/S_2$ 的差可以任意小①．类似地，$F'_1$ 内部的平行四边形的个数与 $F'_2$ 内部的平

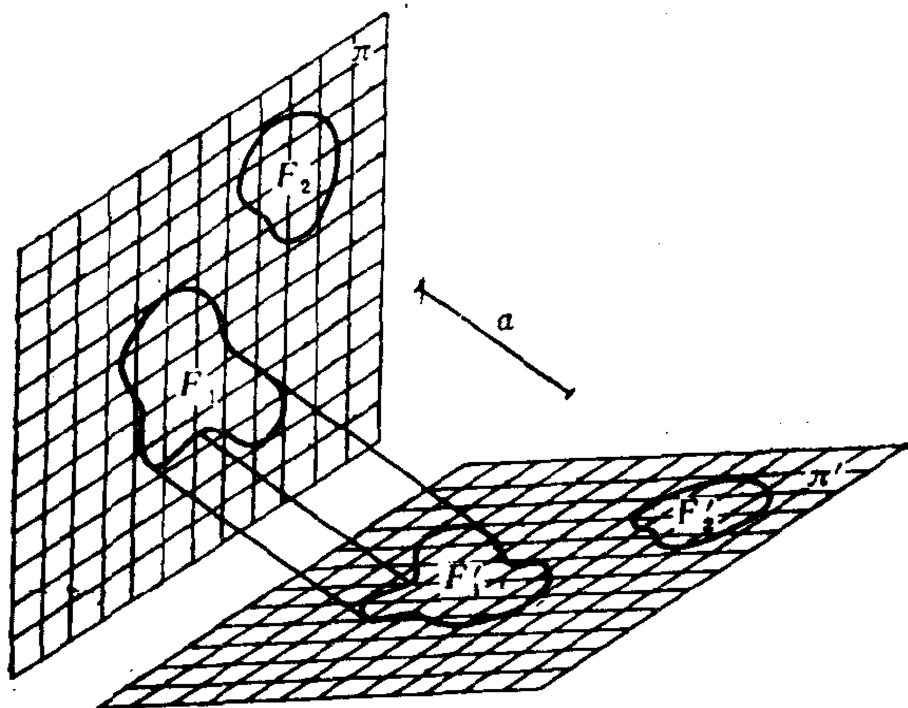



图 9

行四边形的个数之比跟 $F'_1$ 和 $F'_2$ 的面积之比 $S'_1/S'_2$ 的差也可任意小．由于 $F_1$ 内的正方形的个数等于 $F'_1$ 内的平行四边形的个数，以及 $F_2$ 内正方形的个数等于 $F'_2$ 内平行四边形的个数，我们即可得到所要的结论

$$S_1/S_2=S'_1/S'_2.$$

现在我们来证明关于平行射影的下列基本定理．

**定理1** 设 $A$，$B$，$C$ 是平面 $\pi$ 上三个不共线的点，$M$，$N$，$P$ 是平面 $\pi'$ 上的三个不共线的点．则可以把平面 $\pi$ 和 $\pi'$ 放置在空间中，使得存在 $\pi$ 到 $\pi'$ 上的一个平行射影把 $\triangle ABC$ 映射成与 $\triangle MNP$ 相似的 $\triangle A'B'C'$．

---

① $S_1/S_2$ 是 $F_1$ 内正方形的个数与 $F_2$ 内正方形的个数之比当网格中正方形的边长无限减小时的极限．

为此，只需把给定的平面$\pi$和$\pi'$放得使它们沿直线 $AB$ 相交,然后在平面$\pi'$上选取一点$C'$,使得$\triangle ABC' \backsim \triangle MNP$，则所要的平行射影由直线$CC'$确定(图10)。

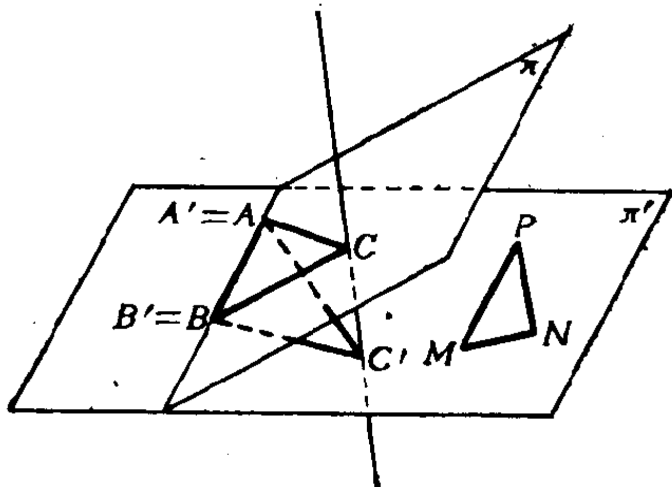



图 10

1. 试证明三角形的三条中线共点(即交于一点)。

2. 试证明梯形的非平行边的延长线的交点同梯形对角线的交点的连线平分梯形的底。

3. 设$l$和$l_1$是平面上给定的两条平行直线。

(a) 试单用直尺平分直线$l$上的线段$AB$。

(b) 试单用直尺作通过给定点$M$且平行于$l$和$l_1$的一条直线。

问题3(a)的一个推广是下节的问题32(b)。

4. 设$M$,$N$,$P$分别是在三角形$ABC$的边$AB$,$BC$,$CA$上的三个点，使得$AM/MB = BN/NC = CP/PA$。试证明：

(a) $\triangle MNP$的中线的交点同$\triangle ABC$的中线的交点重合；

(b) 由直线$AN$,$BP$,$CM$构成的三角形的中线的交点同$\triangle ABC$的中线的交点重合。

5. 给定三角形$ABC$。试在$\triangle ABC$的内部找一点$M$，使得三角形$ABM, BCM, CAM$的面积相等。

6. 设$A_1, B_1, C_1$分别是三角形$ABC$的边$BC, CA, AB$上的点，它们使得

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=k.$$

又设$A_2, B_2, C_2$分别是$\triangle A_1B_1C_1$的边$B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$上的点，它们使得

$$\frac{C_1A_2}{A_2B_1}=\frac{A_1B_2}{B_2C_1}=\frac{B_1C_2}{C_2A_1}=k.$$

试证明三角形$ABC$和$A_2B_2C_2$相似。

7. 设$K, L, M$分别是面积为1的三角形$ABC$的三条边上的点，并且分别分各自所在的边成比$k_1, k_2, k_3$。试证明三角形$KLM$的面积只与数$k_1, k_2, k_3$有关，与究竟是哪条边分成哪一个比无关。

8. 经过三角形$ABC$的每一个顶点作两条直线三等分对边。这六条直线确定一个六角形[图11(a)]。试证明连接这个六角形的对顶点的对角线交于一点。

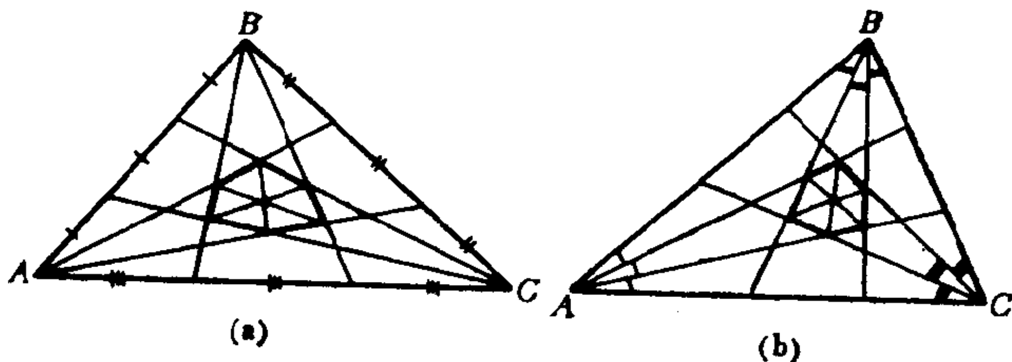



图 11

在问题8中我们假定从$\triangle ABC$的每一个顶点所作的两条直线三等分对边，如果把这个假设改成这些直线三等分顶

角，我们可以得到问题 8 中的定理的一个有趣的变形[图11(b)][1]。

9. 设$M, N, P$是三角形$ABC$的边②$AB, BC, AC$上的点。试证明：

(a) 如果点$M_1, N_1, P_1$分别跟$M, N, P$关于边$AB, BC, AC$的中点对称[图12(a)]，则三角形$MNP$和$M_1N_1P_1$的面积相等(特别，如果点$M, N, P$共线，则点$M_1, N_1, P_1$也共线)；

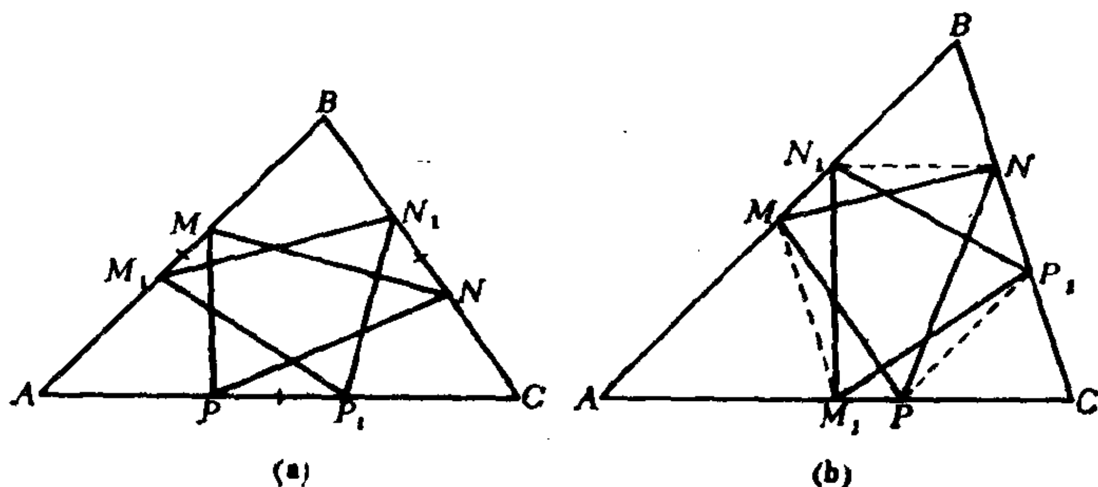



图 12

(b) 如果$M_1, N_1, P_1$分别是$\triangle ABC$的边$AC, BA, CB$上的点，使得$MM_1 \parallel BC$，$NN_1 \parallel CA$，$PP_1 \parallel AB$[图12(b)]，则三角形$MNP$和$M_1N_1P_1$的面积相等(特别，如果点$M, N, P$共线，则点$M_1, N_1, P_1$也共线)。

10. 设点$M, N, P$和$M_1, N_1, P_1$的取法如9(a)。试证明

---

① 在Coxeter的Introduction to Geometry(2nd ed.)pp.25, 423(Ex.1)或在本丛书中他的著作《几何学的新探索》(陈维桓译，北京大学出版社，1986.——中译者)，pp.56,188 (Ex.1)可以找到一个特别简单的证明。

② 在这里和在问题10中，三角形的“边”指的是经过两个顶点的整条直线，而不仅仅是连接顶点的线段。

以 $AN, BP, CM$ 为边的三角形与以 $AN_1, BP_1, CM_1$ 为边的三角形面积相等(特别，如果直线 $AN, BP, CM$ 共点，则直线 $AN_1, BP_1, CM_1$ 也共点)。

11. (a) 设 $l$ 是通过三角形 $ABC$ 的中线的交点 $M$ 的直线，交三角形的边于点 $R, S, T$ ($R$ 和 $S$ 在 $M$ 的同一侧)。试证明

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}.$$

(b) 设 $l$ 是经过平行四边形 $MNPQ$ 的顶点 $M$ 的直线，并交直线 $NP, PQ, NQ$ 于点 $R, S, T$。试证明

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}.$$

12. 试在给定的三角形 $ABC$ 中内接一个具有给定面积 $\sigma$ 的矩形，使它的两个顶点在边 $AB$ 上，其余的顶点分别在边 $CA$ 和 $CB$ 上。

13. 三角形 $ABC$ 的边是三个平行四边形的对角线，这些平行四边形的边有相同的方向(图13)。试证明这些平行四边形的另一条对角线共点。

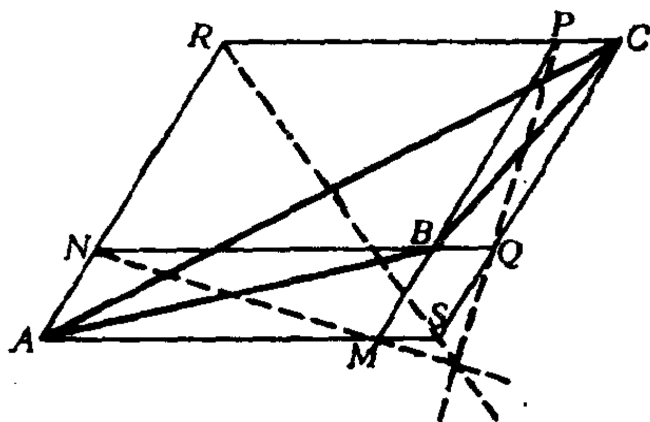



图 13

14．试证明：四边形 $ABCD$ 的对角线的中点的连线平分四边形的对边交点的连线段(图14)。(显然，要使得对边相交，这个四边形不能是平行四边形或梯形。)

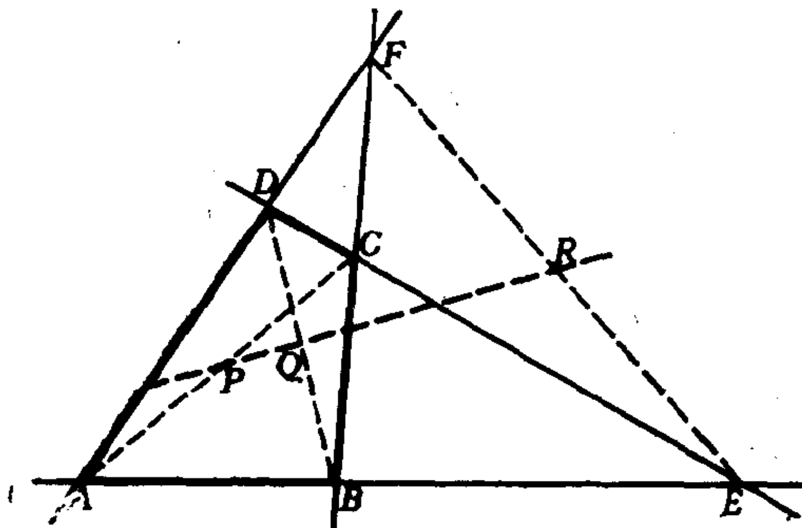



图 14

在问题14中的定理常常陈述成不同的形式。四条直线(其中沒有三条线共点，并且任意两条都不平行)构成的图形称为完全四边形，这四条直线(这个完全四边形的边)的六个交点称为它的顶点，对顶点(即不在同一边上的顶点)的连线称为它的对角线。用这些术语可以将问题14陈述如下：完全四边形的对角线的中点共线(高斯定理或完全四边形定理)。

15．(a) 设$A_1,B_1,C_1,D_1$分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 $CD,DA,AB,BC$ 上的点，它们使得

$$\frac{CA_1}{CD}=\frac{DB_1}{DA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{BD_1}{BC}=\frac{1}{3}.$$

试证明由直线 $AA_1,BB_1,CC_1,DD_1$ 构成的四边形的面积是平行四边形 $ABCD$ 的面积的1/13。

(b) 设$A_1,B_1,C_1$分别是三角形 $ABC$ 的边 $BC,CA,AB$上

的点，它们使得

$$\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{3}.$$

试证明由直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 确定的三角形的面积是$\triangle ABC$的面积的 1/7。

16．试证明塞瓦(Ceva)定理：设$M, N, P$分别是三角形$ABC$的边$AB, BC, CA$上的点(但不在它们的延长线上)，并设

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1,$$

则直线 $AN$，$BP$，$CM$ 共点。

在《几何变换》第二册，第一章，§ 1 的问题 27(b)和本书 § 2 的问题34(b)中，给出了提法更为完全的塞瓦定理的一个证明；在 § 2 中还有这个重要定理的许多应用。

到现在为止，我们总假设平面$\pi$和$\pi'$是不同的。这就是为什么在这一节中我们宁可说平面$\pi$到平面$\pi'$上的映射，而不说平面到它自身上的变换（例如《几何变换》第一册和第二册中所研究的等距变换和相似变换）的原因。

现在我们来考虑平面$\pi$到它自身上的用下述方法得到的变换：先在空间中移动$\pi$的位置，然后用平行射影把它映射到它原来的位置上。这种变换我们称之为*平面到它自身上的平行射影*。每一个等距变换是平面的这种变换的特殊情形；当平面在空间中的新位置平行于它原来的位置时，平面到它自身上的平行射影就是等距变换。

从平行射影的性质A可以推出：*在平面到它自身上的平行射影下，直线变成直线*。平面到它自身上的将直线变成直

线的1-1变换称为仿射变换或仿射。平面的等距变换和相似变换是仿射的最简单的例子。比它们较为一般的例子是平面到它自身上的平行射影，由于它不一定保持线段的长度之比不变。因而一般说来会改变图形的形状。

可以证明，平面的每一个仿射基本上是平面到它自身上的一个平行射影．事实上，下面的定理成立：

**定理 2**　平面的每一个仿射可以用平面到它自身上的一个平行射影，随后再作一个相似变换来实现。

这个定理表明，研究仿射变换的性质，和研究平面到它自身上的平行射影和相似变换的共同性质是一回事[1]；特别，它意味着平面的仿射有性质B，C，D，因为它们都是平面到它自身上的平行射影和相似变换所共同具有的性质．定理2还揭示了平面到它自身上的两个或多个平行射影的乘积的性质；那就是说，它证明了这种乘积还是平面到它自身上的平行射影、或者是平行射影随后再作一个相似变换（因为这种乘积显然是平面的一个仿射）．

定理 2 是定理 1 和下列定理的结果：

**定理 3**　有唯一的平面仿射把不共线的三个点$A$，$B$，$C$变成不共线的三个点$A'$，$B'$，$C'$。

如果我们假设定理 3 已经证明，则定理 2 就容易推出来．实际上，由于只有唯一的仿射把给定的一个三角形$ABC$变成给定的三角形$A'B'C'$，这个变换必定和下面所说的变换相一致，该变换就是平面到它自身上的平行射影随后再作相似变换，并且其结果也要把三角形$ABC$变成三角形$A'B'C'$（从定理 1 可知这种平行射影和相似变换是存在的）．现在

---

① 定理 2 说明仿射变换可以定义为平面到它自身上的平行射影随后再作一个相似变换（参看《几何变换》第一册，第二章，§2）．

只剩下定理3尚待证明[1]。

这个证明的想法如下：假设一个仿射把三点$A$，$B$，$C$变成给定的三点$A'$，$B'$，$C'$。我们要证明这时平面上每个点$M$的象$M'$也就确定了。为此，首先找出其象是确定的若干点，然后找出更多的这种点，再找出更多的这种点，等等。用这种方法我们可以在平面上得到任意稠密的一个点集，这些点在考虑的仿射下的象都是能够作出的。这样，对于平面上的每个点$M$，在那个点集中都有任意接近于$M$的点。其次，我们可以把任意点$M$包含在任意小的一个多角形内部，这个多角形的顶点属于其象已经确定的那个点集。因此，每个这样的多角形都变成一个确定的多角形，从而点$M$的象$M'$跟着也就可以确定[2]；这就是我们所要证明的。

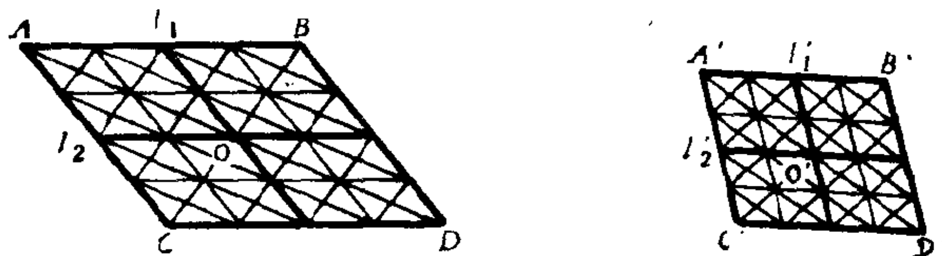



图 15(a)

---

① 严格地说，从定理3和定理1只能推出：把至少一组不共线的三点$A$，$B$，$C$变成一组不共线的三点$A'$，$B'$，$C'$的平面上的每一个仿射，可以用平面到它自身上的平行射影同一个相似变换的乘积来实现。然而，容易看到，我们不可能有把每个三点组都变成共线的三点组的仿射变换。事实上，如果每个三点组$A$，$B$，$M$（其中$A$，$B$固定，$M$任意）都变成共线的三个象点$A'$，$B'$，$M'$，则平面上所有的点都将变成直线$A'B'$上的点，与平面上仿射变换的定义相矛盾（参看上页）。

② 虽然这些解释使得定理3似乎是有道理的，但它并不构成一个严格的证明；单凭我们有一个其象为已知的任意稠密的点集这一事实，不能推出每一个点都包含在这个集中（例如，在$x$轴上有理点的任意一个集合，无论怎样稠密，都不能包含坐标$x=\sqrt{2}$的点）。如此，尽管我们知道任意接近于$M$的点的象，还是可能存在我们不知道它的象的点$M$。要使上面的说明成为定理3的严格的证明，还需要用到在这里我们没有讲的另外的事实。在这方面可以看，例如，H.S.M.Coxeter的Introduction to Geometry，J.Wiley and Sons，Inc.，New York，1961。

下面我们来说明如何做出上面讲到的那个点集。为此要利用仿射的下述性质：仿射把平行线变成平行线。因为如若不然，两条平行线 $l$ 和 $m$ 变成两条相交的直线，则它们的交点的原象将同时属于 $l$ 和 $m$，而这是不可能的[①]。

设 $l_1$ 表示直线 $AB$，$l_2$ 表示直线 $AC$。我们的变换把 $l_1$ 变成经过点 $A'$，$B'$ 的直线 $l'_1$，$l_2$ 变成经过点 $A'$，$C'$ 的直线 $l'_2$。设 $CD$ 是经过 $C$ 平行于 $l_1$ 的直线，$BD$ 是经过 $B$ 平行于 $l_2$ 的直线[图15(a)]。由于仿射把平行线变成平行线，$CD$ 变成经过 $C'$ 平行于 $l'_1$ 的直线，$BD$ 则变成经过 $B'$ 平行于 $l'_2$ 的直线，从而 $D$ 变成这两条直线的交点 $D'$。这样，图15(a)中的平行四边形 $ABCD$ 就变成平行四边形 $A'B'C'D'$，并且 $ABCD$ 的对角线 $AD$ 和 $BC$ 的交点 $O$ 变成 $A'B'C'D'$ 的对角线 $A'D'$ 和 $B'C'$ 的交点 $O'$。现在考虑 $ABCD$ 的中线，即经过 $O$ 点分别平行于 $l_1$ 和 $l_2$ 的直线，它们的象是经过 $O'$ 分别平行于 $l'_1$ 和 $l'_2$ 的直线，即 $A'B'C'D'$ 的中线；换句话说，$ABCD$ 的中线同 $l_1$ 和 $l_2$ 的交点变成 $A'B'C'D'$ 的边的中点。

其次，正如我们对 $ABCD$ 所作的那样，对平行四边形 $ABCD$ 被它的中线所分得的四个小平行四边形中的每一个，都作同样的处理，依此类推[图15(a)]。这就在 $ABCD$ 的内部给出了平行四边形的格子（即一个网），我们的仿射变换把这个格子变成 $A'B'C'D'$ 内部的平行四边形的格子，$ABCD$ 中的格子点变成 $A'B'C'D'$ 中的相应的格子点。充分多次地重复这个过程，总能使得在我们网中的平行四边形的边长任意小，并且使得格子点任意稠密。

---

① 注意，仿射把相交直线变成相交直线。

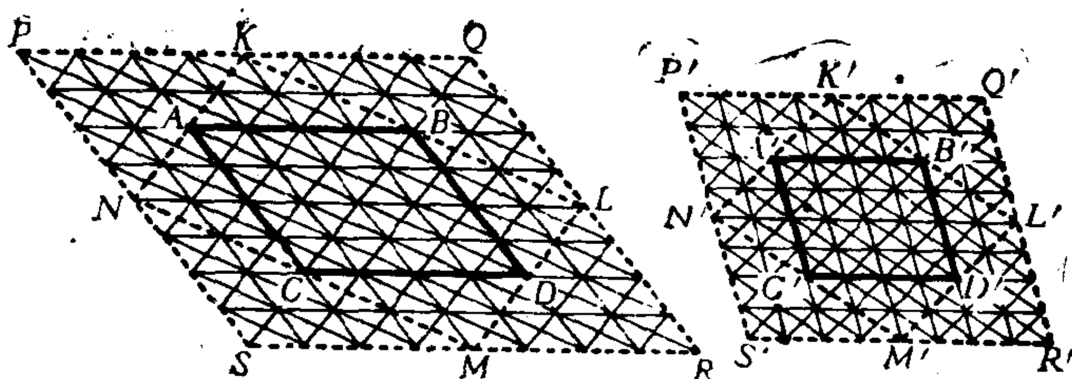



图 15(b)

下面，我们通过$A$和$D$分别作平行于$BC$的直线，通过$B$和$C$作平行于$AD$的直线。在我们的仿射变换下，它们的象是分别通过$A'$和$D'$且平行于$B'C'$的直线，及通过$B'$和$C'$且平行于$A'D'$的直线。用这种方法我们得到其面积是$ABCD$的面积的两倍的平行四边形$KLMN$，它的象是可以作出的平行四边形$K'L'M'N'$。重复这个过程，我们可以得到其面积有$ABCD$的面积四倍大的平行四边形$PQRS$，$PQRS$的边平行于$ABCD$的边[图15(b)]，它的象则是可以作出的平行四边形$P'Q'R'S'$，依此类推。

把上面讲的两个过程（做出不断增大的、且其象可知的平行四边形，和在它们的内部做出愈来愈小的、且其象可知的平行四边形）结合起来，在平面上可以做出一个稠密的点集，其中的点在我们的仿射下的象可以确定，这就是我们所要的点集。

## 2. 平面到平面上的中心射影 平面的射影变换

设$\pi$和$\pi'$是空间中的两个平面。我们选定不在$\pi$和$\pi'$上的一个点$O$，并且从$O$把平面$\pi$射影到平面$\pi'$，即对于$\pi$上的每一个点$P$，让它对应于$\pi'$上属于直线$OP$的点$P'$[图16(a),(b)]。

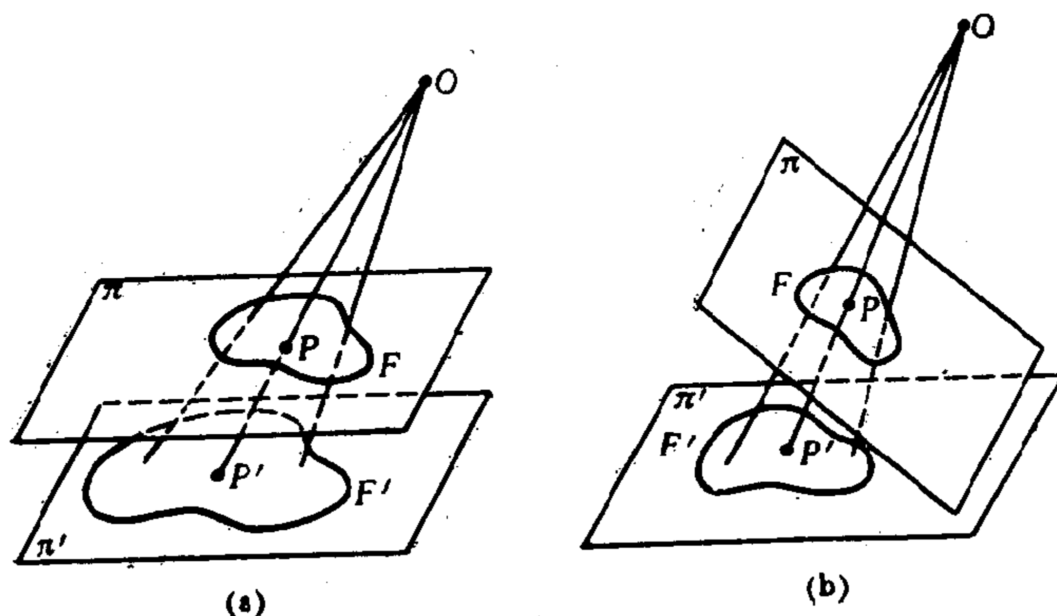



图 16

上面定义的映射称为（从$\pi$到$\pi'$的）中心在$O$点的中心射影。在中心射影下，$\pi$上的图形$F$的象是$\pi'$上的某个图形$F'$（例如，设想灯光明亮的房间中一个窗户的框架在夜里投影到街道上的影子；图17）。

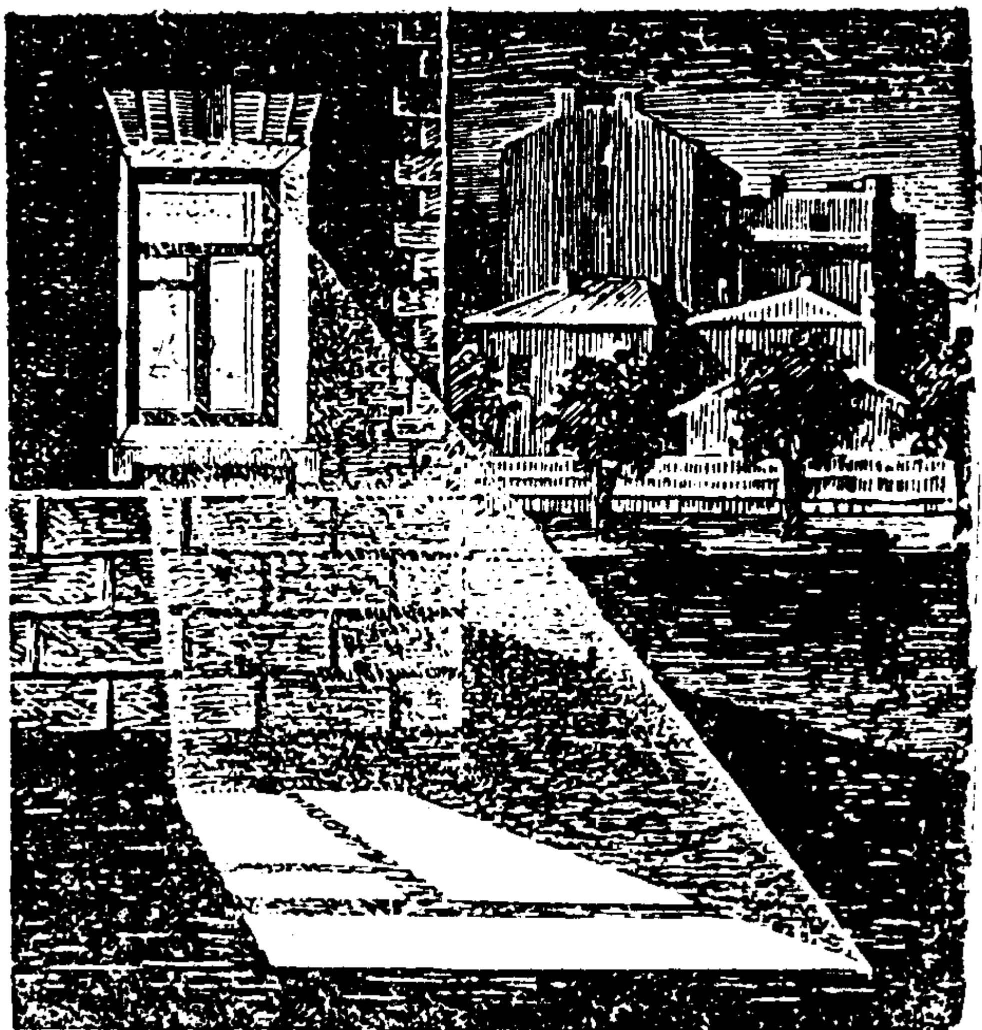
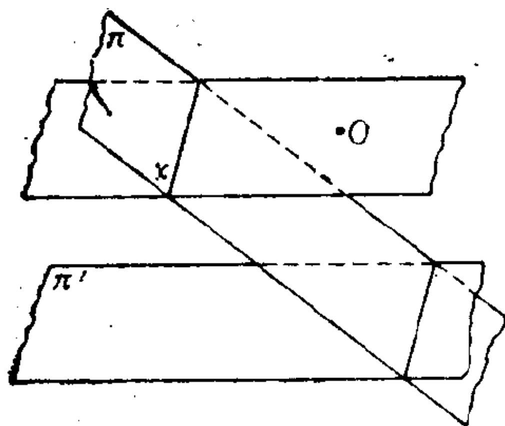


图 17

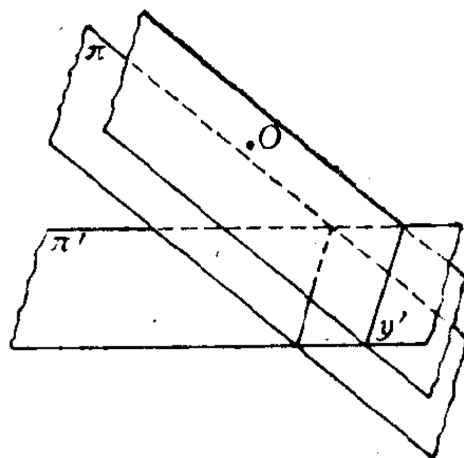
如果平面$\pi$和$\pi'$平行，则从$\pi$到$\pi'$的中心射影把$\pi$上的每个图形$F$变成$\pi'$上的一个与它相似的图形$F'$（这种情况给出了空间中以$O$点为中心的中心相似[①]；参看图16(a).）以后我们主要考虑$\pi$和$\pi'$不平行的情形[图16(b)].

我们注意，在后一种情形$\pi$上有一直线，它上面的点在$\pi'$上没有象，这直线就是经过$O$点平行于$\pi'$的平面与$\pi$的

① 参看《几何变换》第二册中第一章，§1的注②.

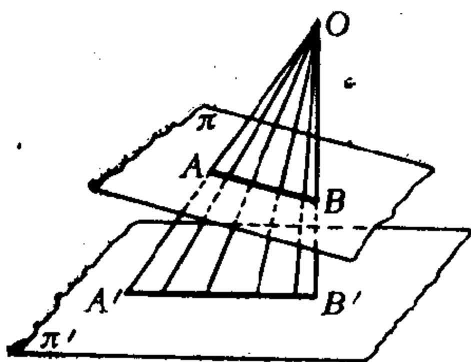


(a)

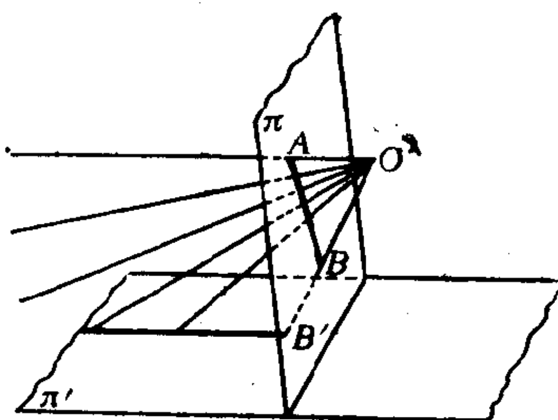


(b)

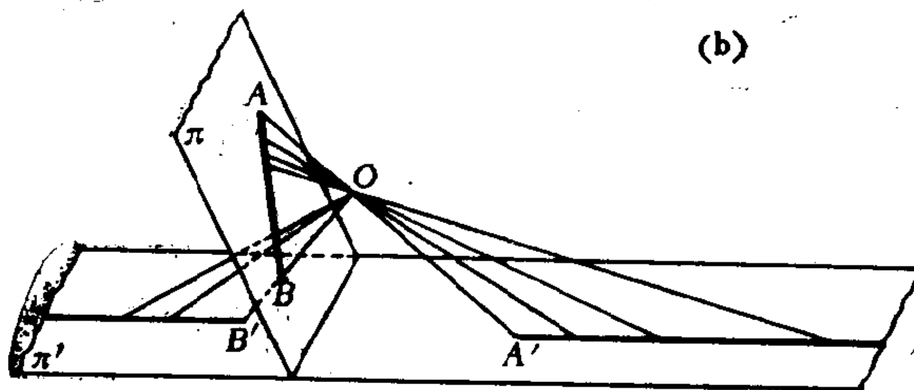
图 18



(a)



(b)



(c)

图 19

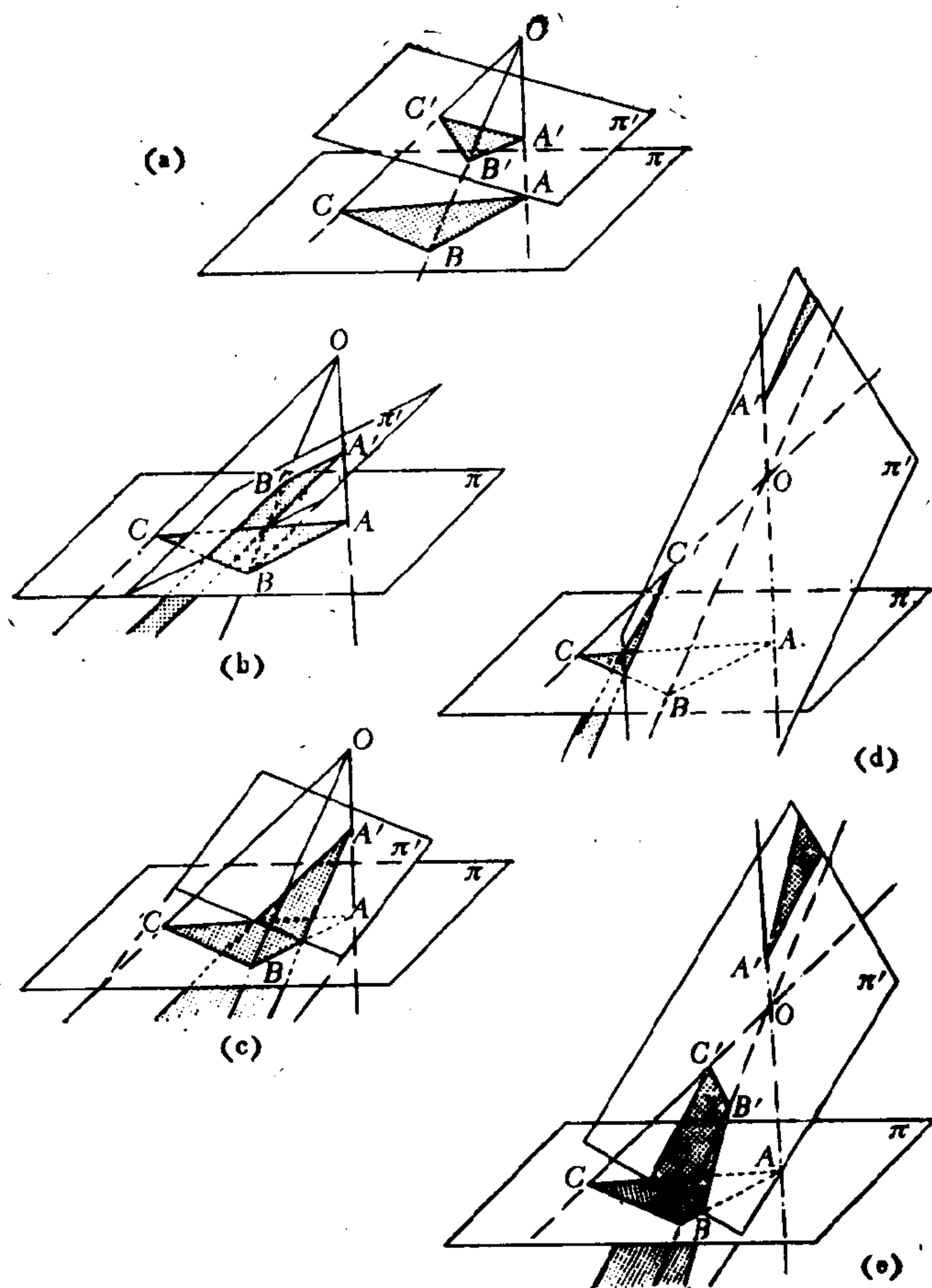



图 20

交线 $x$[图18(a)]. 类似地，$\pi'$ 上有一直线，即经过 O 点平行于 $\pi$ 的平面与 $\pi'$ 的交线 $y'$，它的点在平面 $\pi'$ 上没有原象[图18(b)].

这样，在从平面 $\pi$ 到平面 $\pi'$ 的中心射影下，有两条直线（一条在 $\pi$ 上，另一条在 $\pi'$ 上）处于特殊的地位，我们称之为平面 $\pi$ 和 $\pi'$ 上的特殊直线①.

中心射影比平行射影会使图形发生更大的变形. 在中心射影下，一个线段的象可能是一个线段，也可能是一条射线或两条射线（图19），而一个三角形的象则可以是图20(a)—(e)中画出的任何一个图形.

有时候用适当的中心射影可能使一个复杂的图形得到简化，从而使得关于这个图形的某些问题较易解决. 在这时我们要用到中心射影的下列性质：

A. **中心射影把 $\pi$ 上的直线变成 $\pi'$ 上的直线**(一个例外是 $\pi$ 上的特殊直线 $x$，在前面已经指出，$x$ 上的点不变成 $\pi'$ 上的任何点).

其实，$\pi$ 中直线 $l$ 上的点同 O 点的连线构成一个平面 $\sigma$. 以 O 为中心的射影把 $l$ 变成 $\sigma$ 与 $\pi'$ 的交线 $l'$(图21).

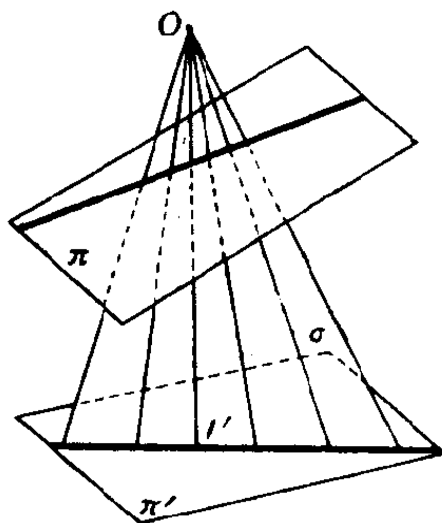


图 21

反之，$\pi'$ 上的每一条直线 $l'$(除去特殊直线 $y'$ 外)都是平面 $\pi$ 上某一条直线 $l$ 的象.

---

① 显然，$x'$ 平行于 $y'$，它们都与平面 $\pi$ 和 $\pi'$ 的交线平行.

Б．若平面$\pi$上的直线$l_1$和$l_2$交于特殊直线$x$上的一点$M$，则在中心射影下它们的象是$\pi'$上的两条平行直线$l'_1$和$l'_2$。

其实，在这时由点$O$和直线$l_1, l_2$分别确定的两个平面$\sigma_1, \sigma_2$交于与$\pi'$平行的直线$OM$。因此，$l_1$和$l_2$的投影$l'_1$和$l'_2$是$\pi'$上的平行直线[图22(a)]。

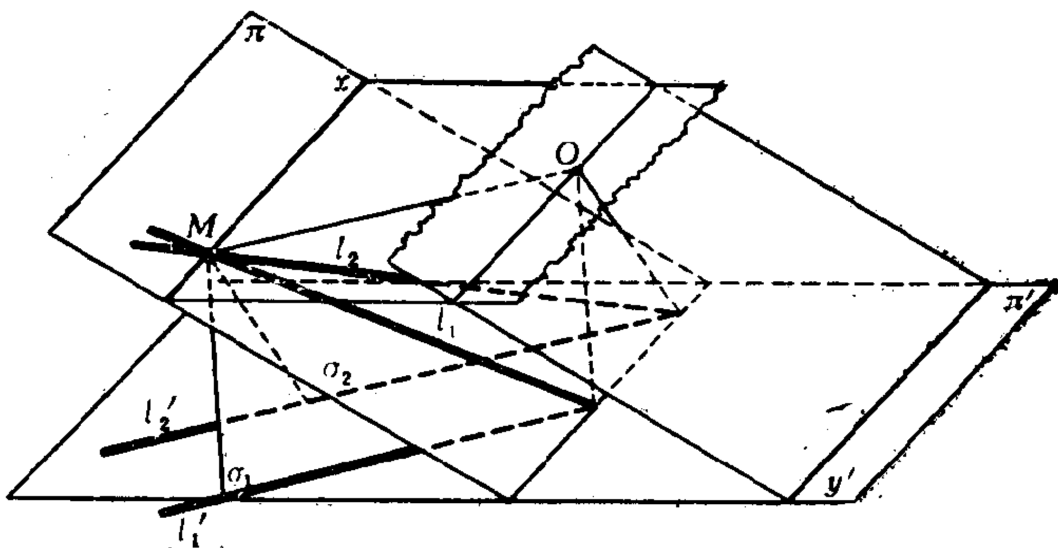



图 22(a)

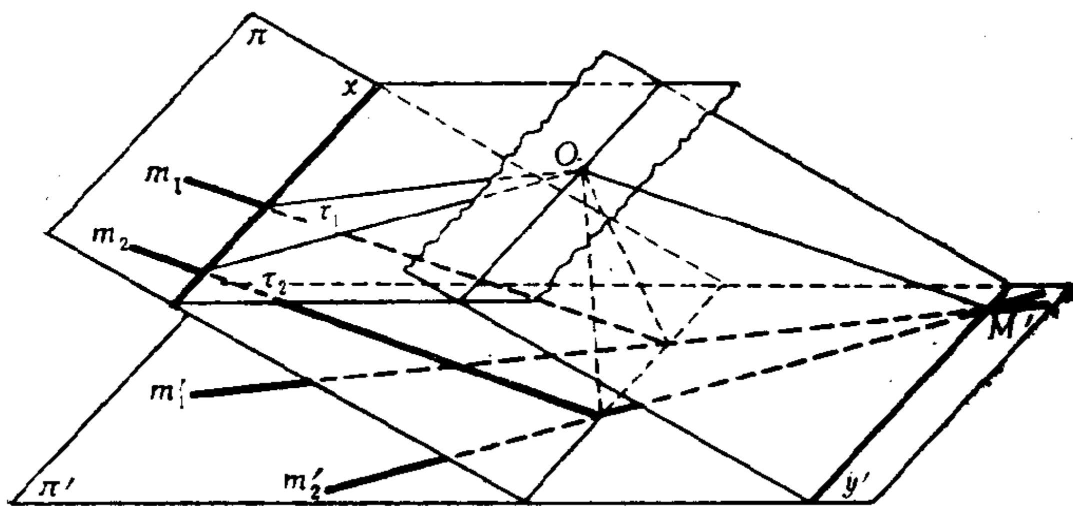



图 22(b)

中心射影把$\pi$上的两条平行直线$m_1$和$m_2$变成$\pi'$上的两条直线$m_1'$和$m_2'$，它们的交点$M'$在特殊直线$y'$上。这从下列事实可以推出：由点$O$和直线$m_1,m_2$分别确定的平面$\tau_1$，$\tau_2$交于同$\pi$平行的直线$OM'$，并且同$\pi'$交于特殊直线$y'$上的一点$M'$[图22(b)]。这个规则的例外是平行于$x$的那些直线，它们映射成平行于$y'$的直线(图23)。

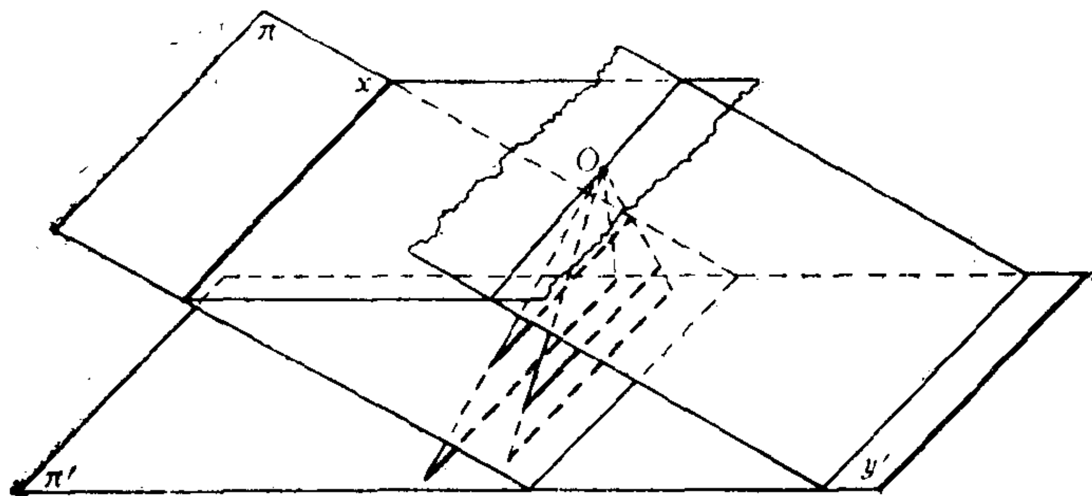



图 23

利用中心射影的性质A和B，我们能够证明许多有趣的结果。(大家看到，在这些定理的一些陈述中包含着某些不确切的地方，这些问题到后面再讨论(参考第46页及其后诸页))。

17. (a) 设在一平面上给定两条直线$l_1,l_2$和一个点$P$，$P$不在$l_1$和$l_2$上，经过$P$作两条直线，一条交$l_1$和$l_2$于点$A$和$B$，另一条交$l_1$和$l_2$于点$C$和$D$[图24(a)]。试证明

(i) 直线$AD$和$BC$的交点(对于经过$P$点的所有直线偶)的轨迹是一直线$p$；

(ii) 对于不平行的$l_1$和$l_2$，$p$经过$l_1$和$l_2$的交点$Q$；

(iii) 如果以直线$PQ$上的点$P_1$代替$P$，$p$不变。

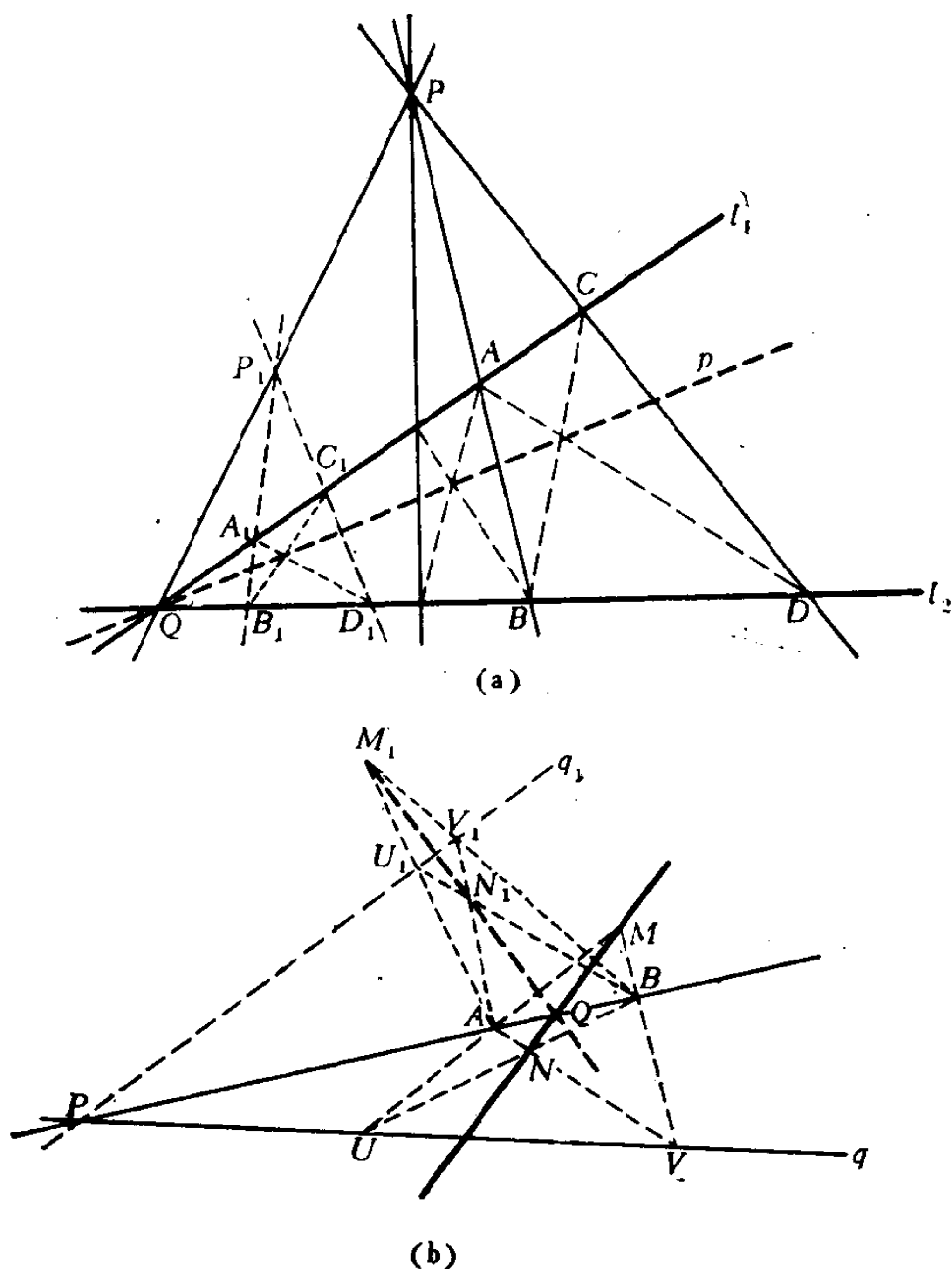



图 24

(b) 在平面上给定直线 $q$ 和不在 $q$ 上的两个点 $A$，$B$。设 $U$，$V$ 是 $q$ 上的一对点，$M$ 是直线 $UA$ 和 $VB$ 的交点，$N$ 是直线 $UB$ 和 $VA$ 的交点[图24(b)]。在 $q$ 上每选择一对点 $U$，$V$ 就给出一条对应的直线 $MN$。试证明：所有这些直线交于

直线 $AB$ 上的同一个点 $Q$；并证明如果我们用经过 $q$ 和 $AB$ 的交点 $P$ 的直线 $q_1$ 代替 $q$，这个 $Q$ 点不变。

问题17(a)中的直线 $p$ 称为点 $P$ 关于直线偶 $l_1$ 和 $l_2$ 的极线（可以把这个概念同本书§4中点关于一个圆的极线进行比较）．问题17(b)中的点 $Q$ 称为直线 $q$ 关于点偶 $A$，$B$ 的极点。

18．(a) 设 $M$ 是平面上一点，$l_1$ 和 $l_2$ 是平面上交于一不可达点（参看《几何变换》第二册，第一章，§1)的两条直线。试用直尺（不用圆规）作经过点 $M$ 和 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点的直线[图25(a)]。

(b) 平面上的一条不可达直线 $l$ 由两对直线 $p_1$，$p_2$ 和 $q_1$，$q_2$ 确定，这两对直线分别交于 $l$ 上的点 $P$ 和 $Q$[图25(b)]。设 $m$ 是给定的一条直线，$M$ 是给定的一个点．试只用直尺作出经过 $M$ 并且经过 $m$ 与 $l$ 的交点的直线。

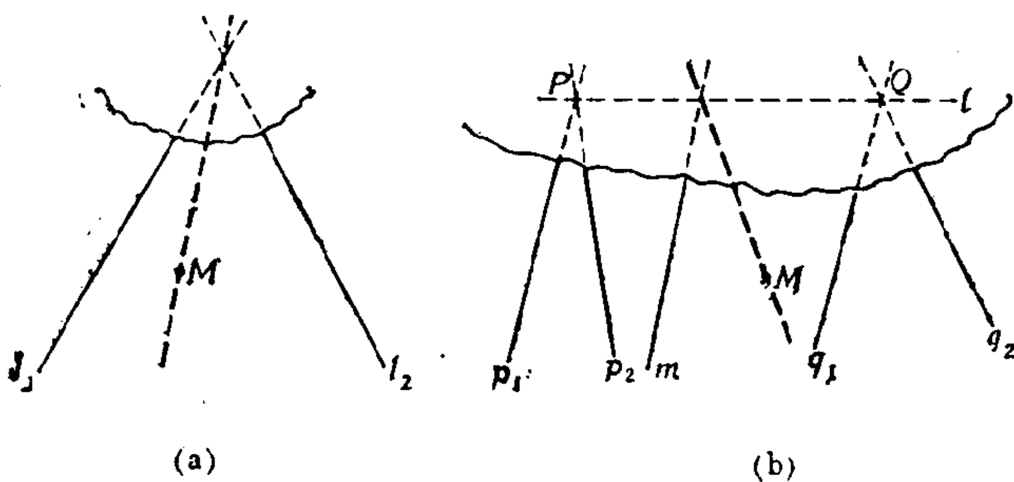



图 25

(c) 试只用直尺作出经过不可达点 $P$ 和 $Q$ 的直线 $l$，$P$ 和 $Q$ 分别由两对直线 $p_1$，$p_2$ 和 $q_1$，$q_2$ 确定[图25(c)]。

(d) 平面上两条不可达直线 $l_1$ 和 $l_2$[图25(d)]，每一条

都用上面问题(c)中确定直线 $l$ 的方法由两对直线确定。试只用直尺作出经过给定点 $M$ 和 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点 $L$ 的直线。

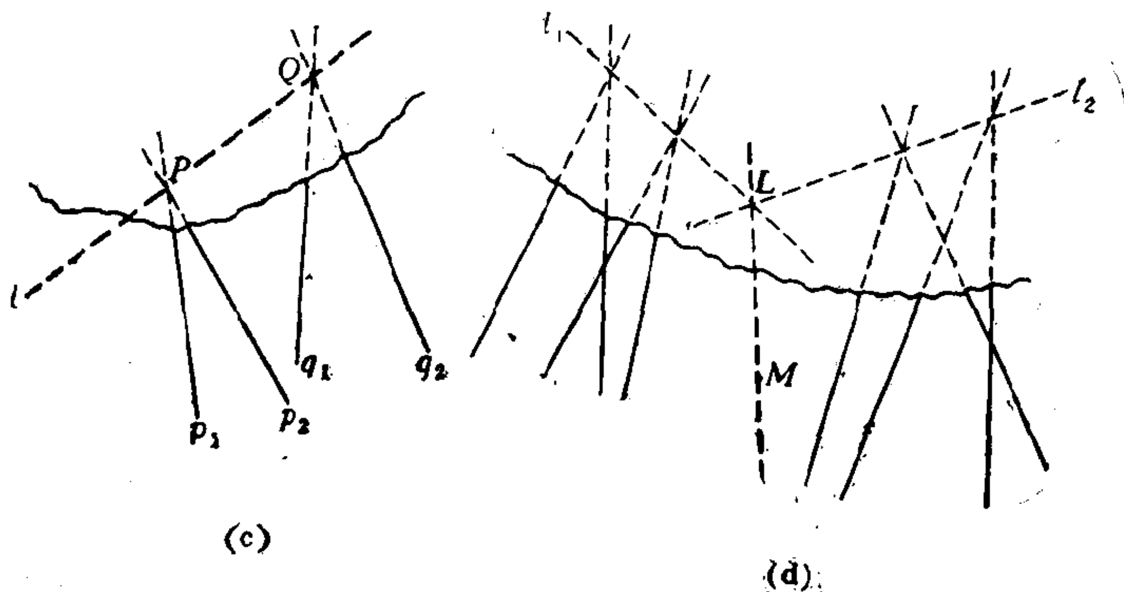



图 25

在《几何变换》第二册中，我们第一次遇到了包含不可达元素的作图（即“在平面的一个有界部分作图”），在那里特别提到这种作图法在大地测量中的重要性（参看《几何变换》第二册，第一章，§1中的注）。在这方面应当指出，由于在大地测量中不可能用圆规，因此单用直尺作图有着特殊的意义①。问题18(a)—(d)正是这样一种类型的问题。

19. 考虑一个线段 $AB$ 和跟它共面的一个区域 $Q$（图26）。试问：只用直尺，如何把线段 $AB$ 延长到区域 $Q$ 的右侧，而不在区域 $Q$ 内部作任何直线？（这个问题可以解释为，譬如说，一片树林外的场地上的一条直线，要朝树林的另一侧作延伸而又不穿过这片树林。）

---

① 严格地说，大地测量作图的几何模式是用直尺和量角器作图；其实，大地测量所使用的仪器使得我们可以作直线和在给定直线上的给定点处作一给定的角。单用直尺作图是实际的大地测量中最简单的作图。

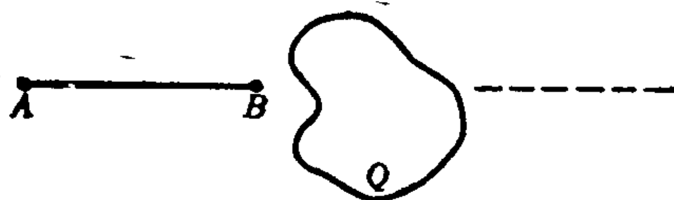



图 26

20．考虑平面上的两点 $A,B$，如果只有一根其长度比距离 $AB$ 要短的直尺可供我们使用，试问怎样作连接 $A,B$ 的线段（图27）？

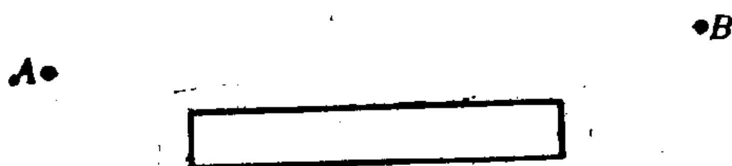



图 27

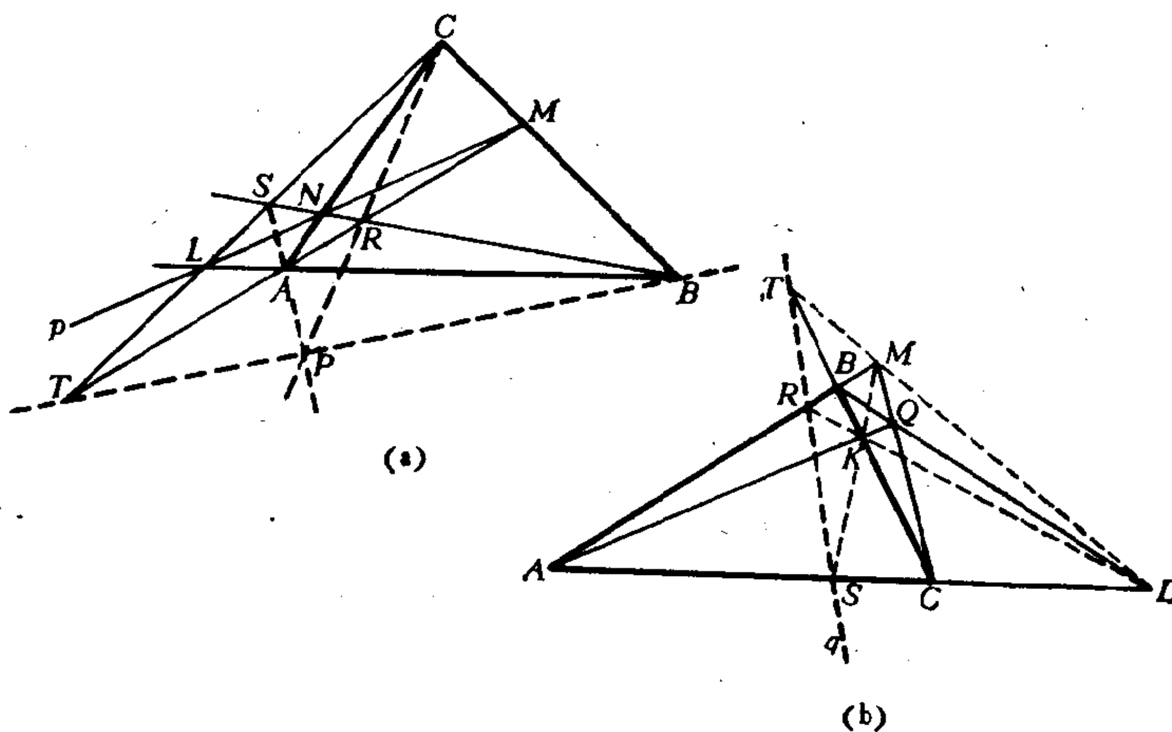



图 28

在解作图问题时，通常假定任意两点可以用一直线相连接，其意思是解这个问题的人有一条无限长的直尺可供他使用。当然，实际的直尺都是十分短的。问题20的意义在于证明：凡是能用无限长的直尺作出的图，都能用一有限长（事实上可以是任意短）的直尺作出。

我们顺便提一下，限制圆规的两只脚的跨度，不会缩小可以作图的范围，也就是说，能够用直尺和圆规作出的每个图，也能用直尺和两脚的跨度固定的圆规作出（并且还可限制至多只能用一次圆规）。§5我们将证明这一点。

21．(a) 直线$p$与三角形$ABC$的边(或其延长线)$AB,BC,CA$分别交于点$L,M,N$。如图28(a)，以$R,S,T$分别表示$AM$和$BN$，$BN$和$CL$，$AM$和$CL$的交点。试证明直线$AS$，$BT$，$CR$共点。

(b) 设给定三角形$ABC$和点$Q$。如图28(b)，直线$QA$，$QB$，$QC$同$\triangle ABC$的相应的边（或其延长线)的交点分别以$K,L,M$表示，三对直线$KL$和$AB$，$KM$和$AC$，$LM$和$BC$的交点分别用$R,S,T$表示。试证明点$R,S,T$共线。

问题21(a)中三条直线$AS,BT,CR$的交点$P$有时叫做直线$p$关于三角形$ABC$的三线极点。问题21(b)中三点$R,S,T$所在的直线$q$称为点$Q$关于三角形$ABC$的三线极线。

22．德札尔格(Desarques)定理。试证明：假若两个三角形$ABC$和$A_1B_1C_1$位于同一个平面上，并且直线$AA_1,BB_1,CC_1$共点，则三对直线$AB$和$A_1B_1$，$AC$和$A_1C_1$，$BC$和$B_1C_1$的交点共线(图29)。反之，如果三对直线$AB$和$A_1B_1$，$AC$和$A_1C_1$，$BC$和$B_1C_1$的交点共线，则直线$AA_1,BB_1,CC_1$共点。

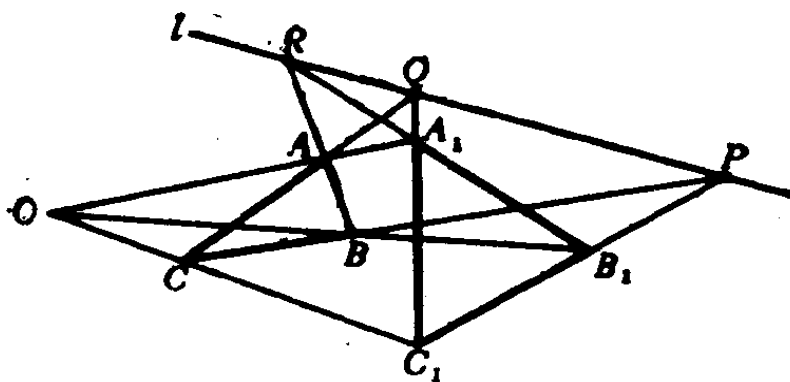



图 29

满足德札尔格定理假设的两个三角形称为透视的。三角形的三对对应顶点的连线的公共点$O$称为透视中心，而三对对应边的交点所在的直线则称为透视轴。

注意，德札尔格定理表示平面上的直线和点的一种普遍的性质，这些直线和点不一定依附于一对三角形。在图29中，假设给定了某些元素，从而使得这个定理易于记忆，但是这样一来却掩盖了它的对称性，因为德札尔格定理中所有的点和直线本来都是平等的。例如，在图29中，直线$OCC_1$可以看成一根透视轴（对于三角形$PBB_1$和$QAA_1$），而点$B$则可以看成一个透视中心（对于三角形$PRB_1$和$CAO$）。对于问题21(a),(b),25,26,27,28可以作类似的注释；在这方面可以看D.希尔伯特和S.康福森合著的一本非常有趣的书《直观几何》[①]第三章。

在问题21(a)和(b)中的定理是德札尔格定理的特殊情形；在图28(a)中，三角形$STR$和$ABC$是透视的，有透视轴$p$；而在图28(b)中，三角形$KLM$也和$ABC$透视，$Q$为

---

① 本书有中译本，王联芳译，人民教育出版社，1959，1964.——中译者

透视中心。

23．四边形 $EFGH$ 内接于四边形 $ABCD$（$E$ 在 $AB$ 上，$F$ 在 $BC$ 上，等等）．试证明：如果边 $EF$ 和 $HG$ 的交点在 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 上，则 $EH$ 和 $FG$ 的交点在对角线 $BD$ 上。

24．(a) 给定三角形 $ABC$ 和三个共线的点 $P,Q,R$；试在 $\triangle ABC$ 中内接一个三角形 $XYZ$，它的边分别要经过点 $P,Q,R$[①]．

(b) 在给定的 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，试内接另一个 $n$ 角形，使得它的边分别通过 $n$ 个给定的共线的点[②]．

(c) 在一平面上给定了三条共点的直线 $l_1,l_2,l_3$ 以及三个点 $A,B,C$。试作一个三角形 $XYZ$，使得它的边分别经过点 $A,B,C$，它的顶点分别在直线 $l_1,l_2,l_3$ 上。

注意，问题 24(a)是问题 24(b)的特殊情形，问题24(c)是问题61的特殊情形，并且所有这四个问题都是问题90的特殊情形。

25．关于双重透视的三角形的定理．设 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 是两个给定的三角形，直线 $AA_1,BB_1,CC_1$ 交于一点 $O$，并且直线 $AB_1,BC_1,CA_1$ 交于一点 $O_1$（图30）．试证明：直线 $AC_1,BA_1,CB_1$ 也交于一点 $O_2$；换句话说，两个双重透视的三角形（在这个定理的假设的意义下）实际上也是三重透视的。

（如果假定了双重透视的三角形存在，则问题 25 的定理就断定存在三个三角形 $ABC,A_1B_1C_1,OO_1O_2$，其中任意两个

---

① 这意思是要作一个三角形$XYZ$，它的顶点 $X,Y,Z$ 在$\triangle ABC$的边或其延长线上，并且$\triangle XYZ$的边或其延长线要经过给定的点．

② 按照上面的注理解"内接"这个词．

三角形是三重透视的，在每种情形下这三个透视中心是第三个三角形的顶点．）

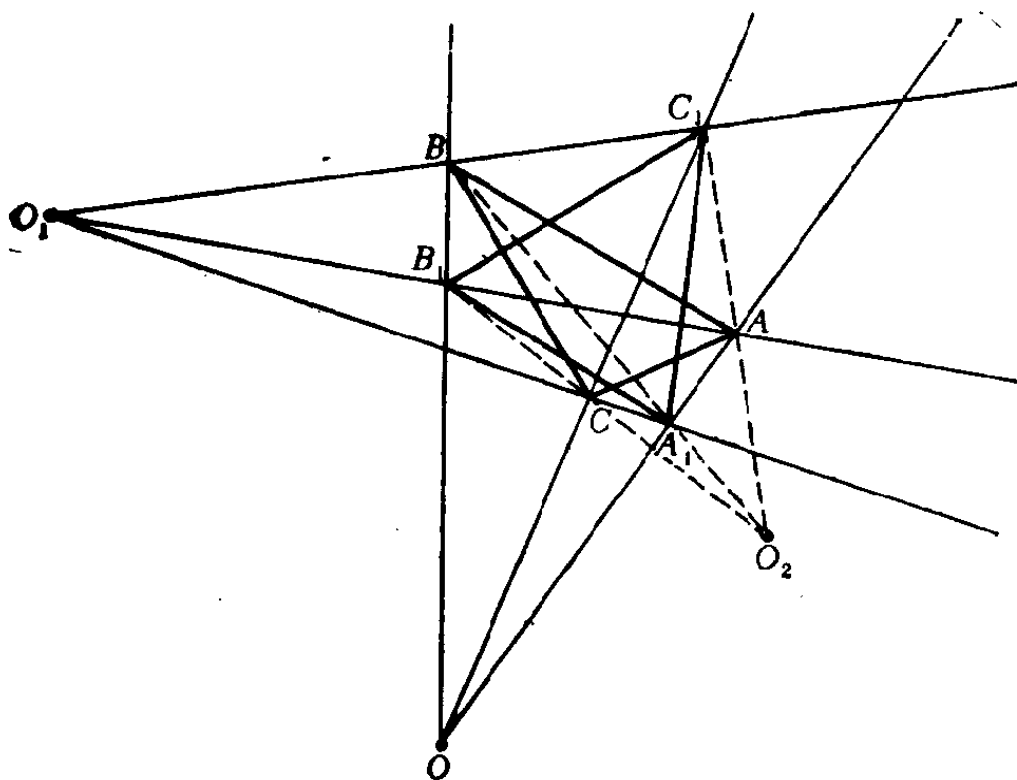



图 30

26．关于三重透视的三角形的定理．设 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 是两个三角形，直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 交于一点 $O$，直线 $AA_1$，$BC_1, CB_1$ 交于一点 $O_1$，并且直线 $AC_1, BB_1, CA_1$ 交于一点 $O_2$（图31）．试证明：直线 $AB_1, BA_1, CC_1$ 也交于一个点 $O_3$（换句话说，在这个定理假设的意义下，两个三重透视的三角形必定是四重透视的．）

27．设给定三个三角形 $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$，使得直线 $AB, A_1B_1, A_2B_2$ 交于一点 $P$，直线 $AC, A_1C_1, A_2C_2$ 交于一点 $Q$，直线 $BC, B_1C_1, B_2C_2$ 交于一点 $R$，并且 $P, Q, R$ 共线．

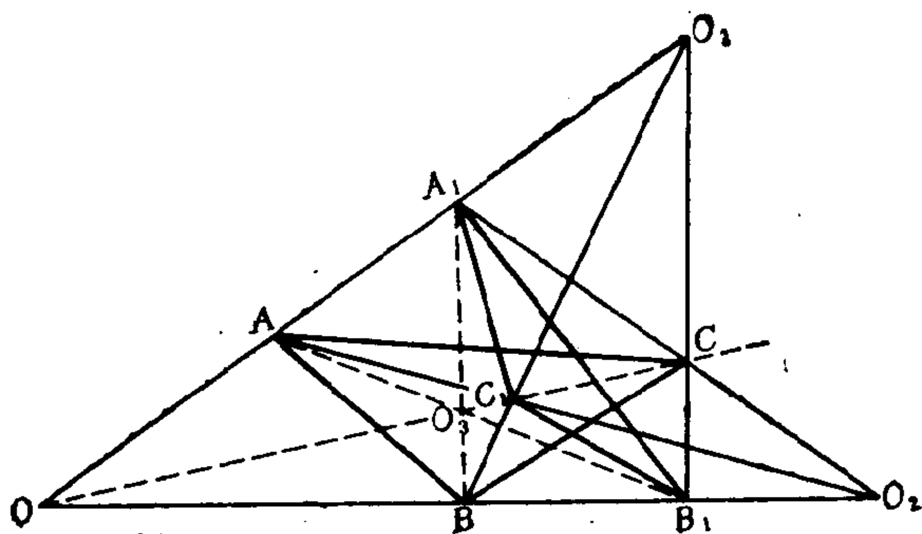



图 31

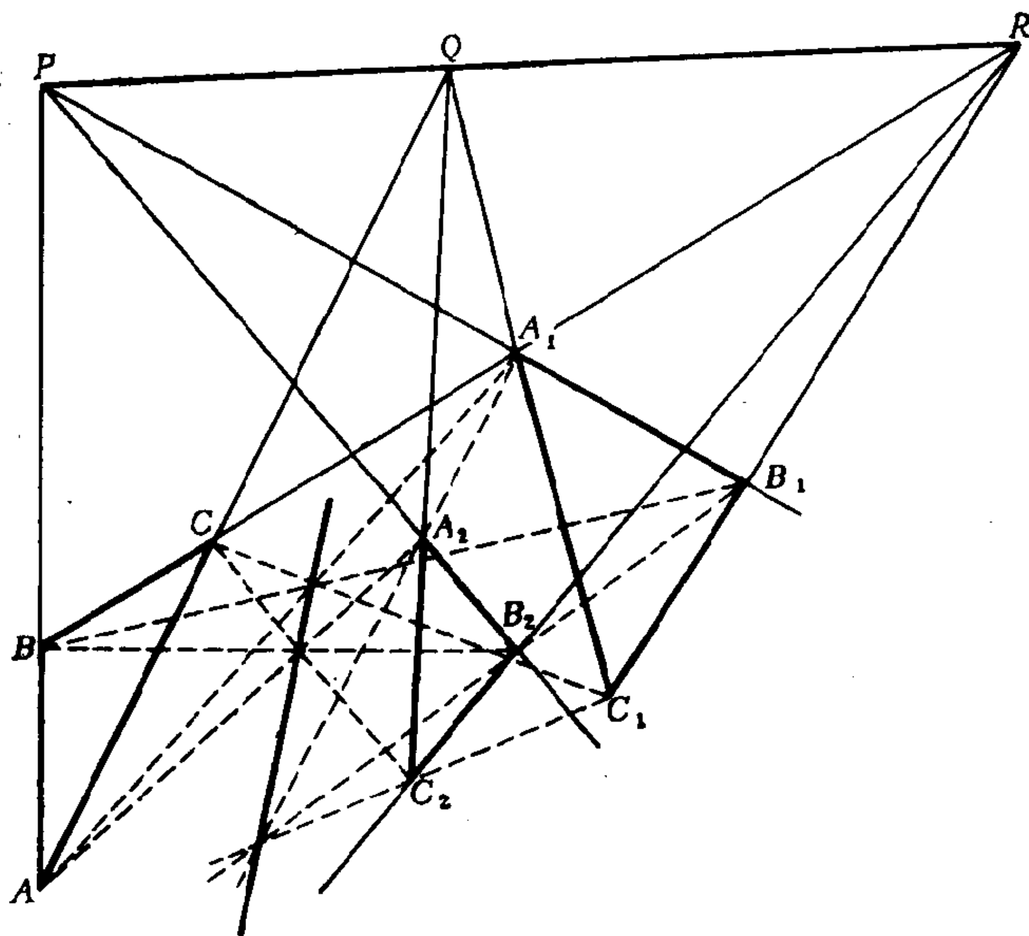



图 32

根据德札尔格定理(问题22)，三个三线组 $AA_1, BB_1, CC_1$；$AA_2, BB_2, CC_2$；$A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ 中的每一组直线都交于一点。试证明这三个交点共线(图32)。

(问题27中的定理可以简述如下：如果三个两两透视的三角形的透视轴重合，则它们的透视中心共线。)

28．帕普斯(Pappus)定理．试证明：如果直线 $EF$ 分四边形 $ABCD$ 为两个四边形 $AEFD$ 和 $BCFE$(图33)，则三个四边形 $ABCD, AEFD, BCFE$ 的对角线的交点共线。

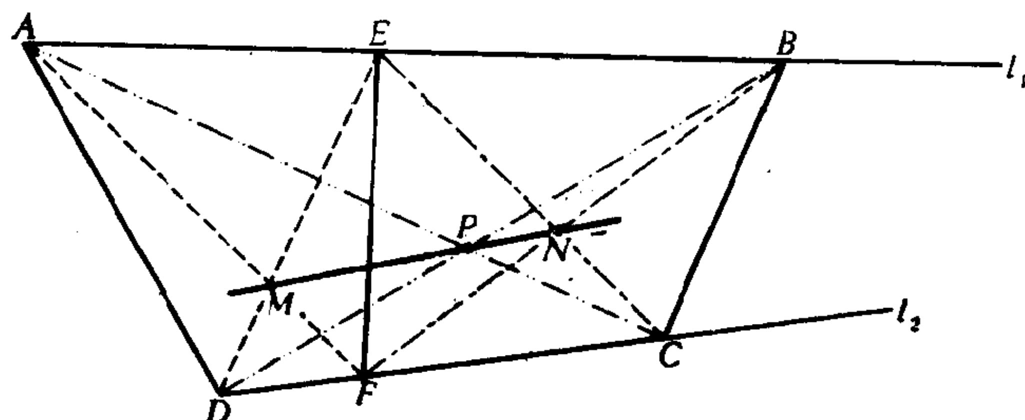



图 33

大家注意，问题28也可以用下列两种方式表述(看图33)：

(a) 如果六角形 $AFBDEC$ (它可以不是凸的，甚至可以自交) 的顶点 $A, E, B$ 在一直线 $l_1$ 上，而顶点 $D, F, C$ 在直线 $l_2$ 上，则这六角形的对边的交点共线。

(b) 如果六角形 $ABNCDM$ (它可以不是凸的，甚至可以自交) 的边 $AB, CN, DM$ 经过一点 $E$，并且边 $CD, BN, AM$ 经过一点 $F$，则这个六角形的对角线 $AC, BD, MN$ 共点。

问题28的这两种模式非常类似于§3中的问题46和47(还可参看§5中的问题75和80的解答)①。

29．试把图33中的平面$\pi$投影到另一个平面$\pi'$上，使得

(i) 直线$AB$是$\pi$的特殊直线；

(ii) 直线$AD$是$\pi$的特殊直线。

试问在这时问题28变成什么样子？

30．设在平面上给定四条直线，其中没有两条是平行的，并且没有三条共点。试证明：在由这些直线构成的四个三角形中，各个三角形的高线的交点在一直线上。

问题30以另一种关系出现在《几何变换》第二册中（参看问题63）。

31．试把问题23中四边形$ABCD$的平面$\pi$投影到另一个平面$\pi'$，使得

(i) 边$AB$是$\pi$的特殊直线；

(ii) 对角线$AC$是$\pi$的特殊直线。

试问这时问题23变成什么样子？

中心射影的性质A和B在某种程度上类似于平行射影的性质A和B（参看第12页）。现在我们试图找出与平行射影的性质C（参看第13页）部分类似的性质。

我们来考察中心射影对一个线段的长度的影响。设$AB$是平面$\pi$上的一个线段，在以$O$为中心的中心射影下，$AB$在平面$\pi'$上的象是$A'B'$(图34)。我们记得，有公共角的两个三角形的面积之比等于夹这个角的两边的乘积之比（例如，

---

① 这种类似决不是偶然的。要完全说明这一点，就要用到圆锥截线的一般理论（参看在第37页中引用的D.希尔伯特和S.康福森的著作）。由于篇幅的限制，我们在本书中不准备介绍这个理论。

从熟知的公式 $\triangle ABC$ 的面积 $=(ab\sin C)/2$ 即可推出）。所以，如果用 $h$ 和 $h'$ 分别表示从 $O$ 点到直线 $AB$ 和 $A'B'$ 的距离，则有

$$\frac{\text{面积}(\triangle OA'B')}{\text{面积}(\triangle OAB)}=\frac{h'\cdot A'B'}{h\cdot AB}=\frac{OA'\cdot OB'}{OA\cdot OB},$$

或
$$A'B'=AB\cdot\frac{OA'\cdot OB'}{OA\cdot OB}\cdot\frac{h}{h'}.$$

于是，如果 $A,B,C$ 是在 $\pi$ 中直线 $l$ 上的三个点，而 $A'$，$B'$，$C'$ 是这些点在到 $\pi'$ 的射影下的象，则从上面的推导可得：

$$(*)\quad \frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC[(OA'\cdot OC')/(OA\cdot OC)](h/h')}{BC[(OB'\cdot OC')/(OB\cdot OC)](h/h')}$$

$$=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{OA'/OA}{OB'/OB}.$$

这表明：跟平行射影情形的性质相反，在这里比值 $A'C'/B'C'$ 和 $AC/BC$ 一般是不等的。然而，如果我们对直线 $AB$ 上的两点 $C$ 和 $D$，作它们分线段 $AB$ 所得到的两个单比的比（图34），则显然有

$$\frac{A'C'}{B'C'}\Big/\frac{A'D'}{B'D'}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{OA'/OA}{OB'/OB}\Big/\frac{AD}{BD}\cdot\frac{OA'/OA}{OB'/OB}$$

$$=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}.$$

表达式
$$\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}$$

称为四点 $A,B;\ C,D$ 的交比。

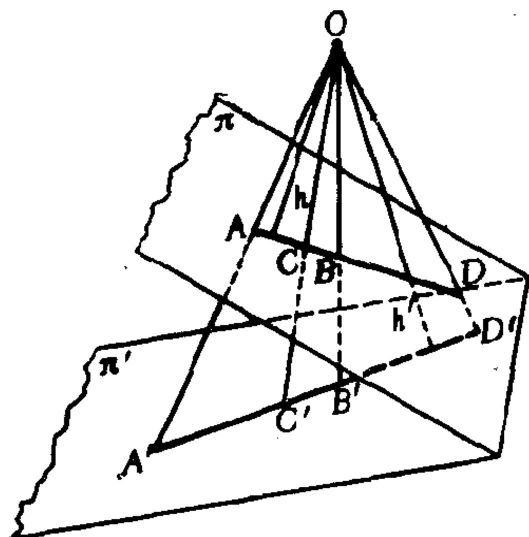



图 34

总之：

C. **中心射影保持共线四点 $A,B$；$C,D$ 的交比不变。**

四个(共线的)点的交比是两个单比 $AC/BC$ 和 $AD/BD$ 的比。由于单比可正可负(参看《几何变换》第二册，第一章，§1)，共线四点的交比自然也有正有负。显然，如果$C$和$D$都在线段$AB$之内或之外，则交比$(AC/BC)/(AD/BD)$为正(因为这时单比 $AC/BC$ 和 $AD/BD$ 同号)；如果$C$和$D$一个在线段$AB$的内部而另一个在外部，则这个交比为负(因为这时单比 $AC/BC$ 和 $AD/BD$ 异号)。换句话说，我们可以讲：如果点偶 $A,B$ 和 $C,D$ 彼此分开[图35(a)]，则四点 $A,B$；$C,D$ 的交比为负；如果它们不彼此分开[图35(b)]，则交比为正。由此可知中心射影保持交比的符号不变，这就是说，即使我们考虑到交比的符号，性质C仍然成立。要证明这个结论，只须注意：如果点偶 $A,B$ 和 $C,D$ 彼此分开（不分开），则线偶 $OA,OB$ 和 $OC,OD$ 也彼此分开（不分开）；因此，在以$O$为中心的射影下，$A,B$ 和 $C,D$ 的两对象点 $A',B'$ 和

$C', D'$ 也彼此分开（不分开）①.

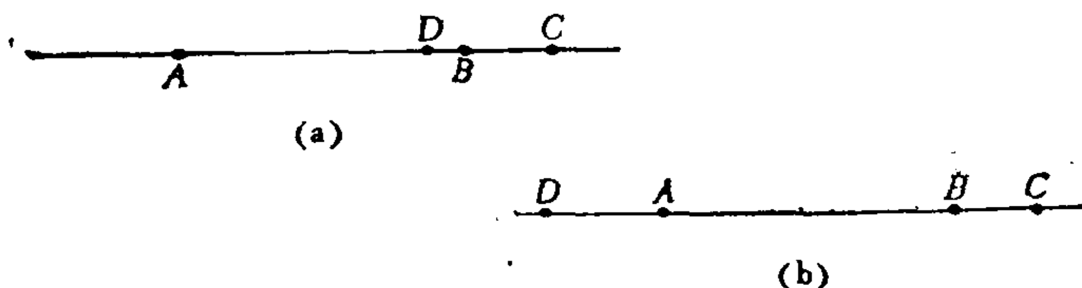



图 35

注意，如果 $AB$ 平行于 $\pi$ 的特殊直线（即如果它平行于 $\pi$ 和 $\pi'$ 的交线；图36)，则显然有 $AB \parallel A'B'$，以及 $OA'/OA = OB'/OB$。因而在这种情形下从公式(*)可以得到

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC},$$

换句话说，在中心射影下，如果平面上的一条直线与该平面上的特殊直线相平行，则此直线上的两个线段的单比保持不变。

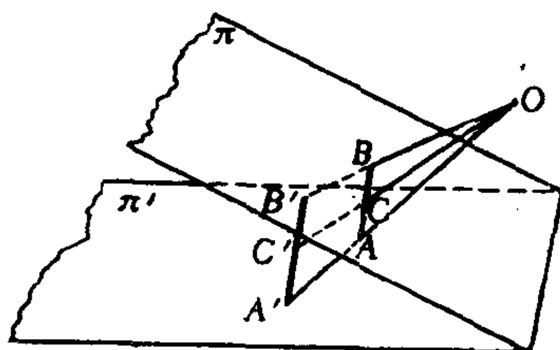



图 36

中心射影的性质 C 是比较复杂的。在我们的初步介绍中，它往往起重要的作用(特别，看最后一节)。在讨论中心射影的所有高等著作中，它起着决定性的作用。

考虑点 $C$ 分线段 $AB$ 的比 $AC/BC$。当 $C$ 是 $AB$ 的中心时是特别有意思的，这时 $AC$ 和 $BC$ 的大小相等而方向相反，

① 注意，类似地有：平行射影不仅保持共线三点 $A, B, C$ 的单比 $AC/BC$ 的大小，而且也保持它的符号不变.

从而 $AC/BC=-1$。类似地，在考虑四点 $A,B;C,D$ 的交比 $(AC/BC)/(AD/BD)$ 时，我们对 $(AC/BC)/(AD/BD)=-1$ 的情形也特别感兴趣。这时，点 $C$ 和 $D$ 中有一个在线段 $AB$ 之内，另一个在 $AB$ 之外；而且单比 $AC/BC$ 和 $AD/BD$ 的绝对值相等(图37)。为了研究这种情况，我们说点 $C$ 和 $D$ 调和地分割线段 $AB$(或点 $C$ 和 $D$ 关于点 $A$ 和 $B$ 是调和共轭的)。




图 37

从上面我们可以看到，线段的中心屡次出现在包含平行射影的问题中(例如，参看问题1,2,3(a),4,9(a),14，问题3(b),8,9(b) 的解答，以及 §1 末定理 3 的证明，在那里某些平行四边形的中线起了重要的作用，等等)。类似地，在涉及中心射影的问题中，常常出现调和分割某些线段的点偶。例如，在问题17(a)中的轨迹——点 $P$ 相对于一对直线 $l_1$ 和 $l_2$ 的极线——可以定义为适合如下条件的点 $M$ 的轨迹：点 $P$ 和 $M$ 调和分割直线 $PM$ 被 $l_1,l_2$ 所截下的线段；问题17(b)中的点 $Q$ 应是直线 $PM$ 上这样的一个点，它使得 $Q$ 和 $P$ 调和分割线段 $AB$①，等等。所有这些结论用中心射影的性质C都很容易证明。

现在要来弥补我们在前面的阐述中的某些不确切的地方。大家记得，当平面 $\pi$ 投影到平面 $\pi'$ 时，每个平面上都

① 问题17(b)中的点 $P$ 和 $Q$ 调和分割线段 $AB$，通常陈述如下：完全四边形的任何两条对角线调和分割第三条对角线(参看上面讲的)。关于这个定理与问题17(b)的结论等价的证明，我们把它留给读者。

包含一条特殊直线；在$\pi$的特殊直线上的点在$\pi'$上没有象，在$\pi'$的特殊直线上的点不是$\pi$上任何点的象。因此，与中心射影有关的命题的确切陈述总要区别这种特殊情况。刚才提到的不确切之处，就是由于迄今为止我们通常不管这种特殊情况。因此，例如，德札尔格定理(参看问题22)的陈述严

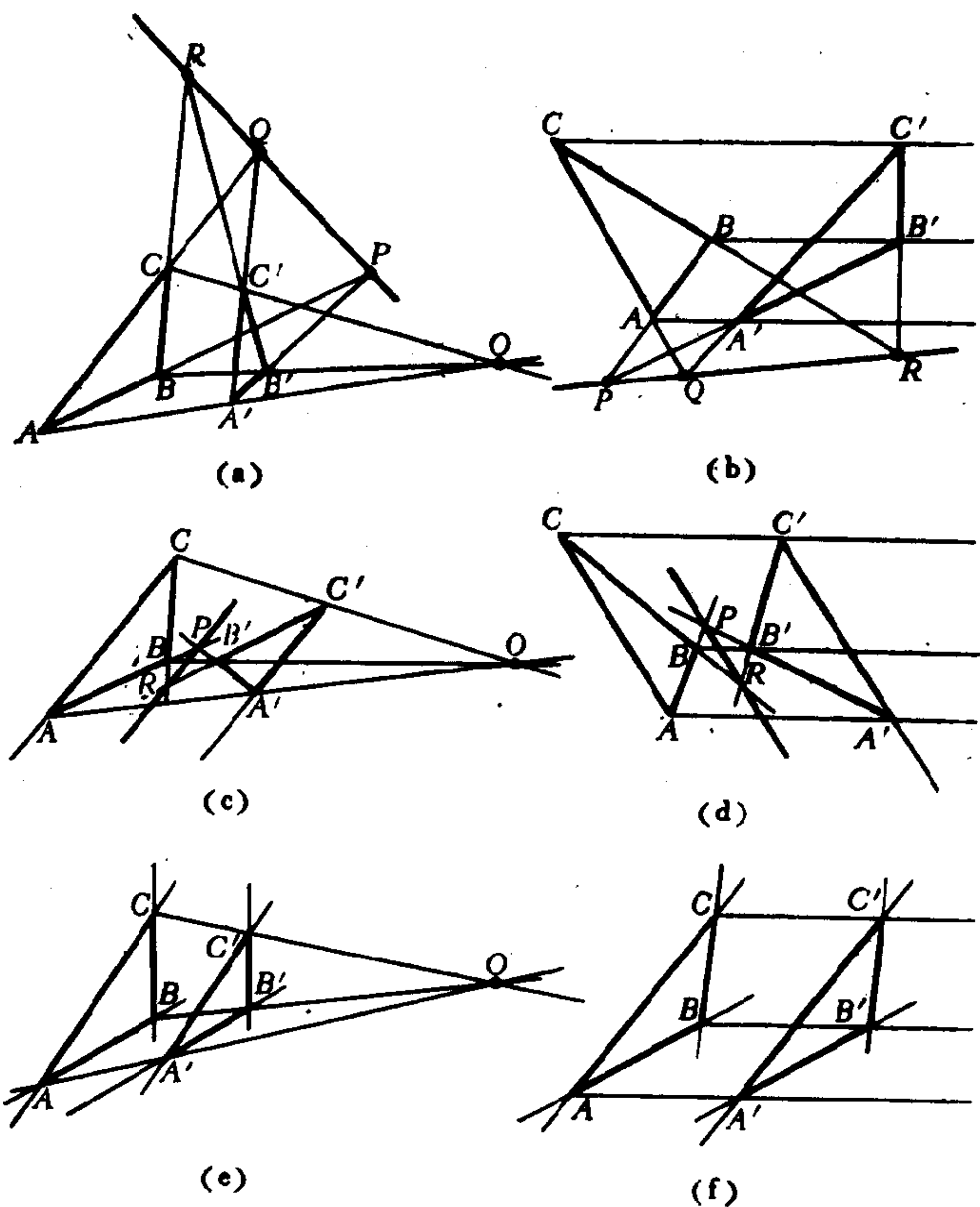



图 38

格地说是不正确的，因为它沒有考虑中心射影可以把共点直线(例如图29中的直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 或 $AB, A_1B_1, PQ$)或者变成共点直线或者变成平行直线这两种可能性. 德札尔格定理确切的陈述取下列形式：*如果两个共面的三角形对应顶点的联线共点或平行，则这两三角形的对应边的交点或者共线*[图38(a),(b)]，*或者一对对应边平行于另外两对对应边的交点的连线*[图38(c),(d)]，*或者两个三角形的对应边两两平行*[图38(e),(f)]；*反过来也成立*. 我们看到，在确切地陈述的时候，这个定理显得十分累赘并且难于掌握. 对于其它许多结果的陈述类似的评注也成立.

为了消除由特殊直线的例外性质所带来的复杂化，我们宁可说平面 $\pi$ 中的特殊直线 $x$ 投影到平面 $\pi'$ 的"无穷远直线"，而配属于 $\pi$ 的"无穷远直线"则投影成 $\pi'$ 中的特殊直线 $y'$. 应当着重指出，用这个术语是为了方便；说"直线 $x$ 投影为无穷远直线"，等价于说"直线 $x$ 在射影下沒有任何象". 相应地，我们宁可说特殊直线 $x$ 上的每一个点 $X$ 都投影到平面 $\pi'$ 的一个对应的"无穷远点". 我们还说经过 $X$ 的直线束通过射影所得到的平行直线束"交于一个无穷远点"①. 这样，每一条直线 $l$ 都有一个无穷远点②. 那就是 $l$ 同与它平行的每一条直线的"交点". 平面中所有直线的无穷远点的全体构成这个平面的"无穷远直线".

下面我们来说明使用这种术语的理由. 如果直线 $l$ 上的一点 $M$ 趋向于 $l$ 与 $x$ 的交点 $X$，则它在平面 $\pi'$ 上的投影沿

---

① 从每一个无穷远点配属于"经过该点"的平行直线束这一事实，使得我们可以把无穷远点同平面上的方向等同起来. 例如，说"经过给定点 $A$ 和给定的无穷远点 $B$ 的直线"，意思就是这条直线经过 $A$ 点，并且与无穷远点 $B$ 所对应的方向平行，等等.

② 跟直觉相反，对一条直线配上一个无穷远点已经证实是适宜的.

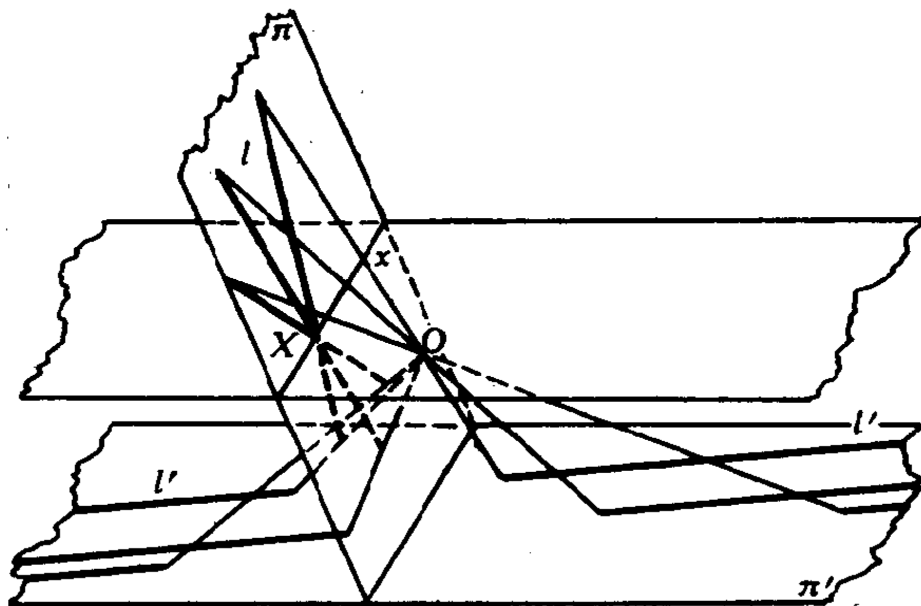



图 39

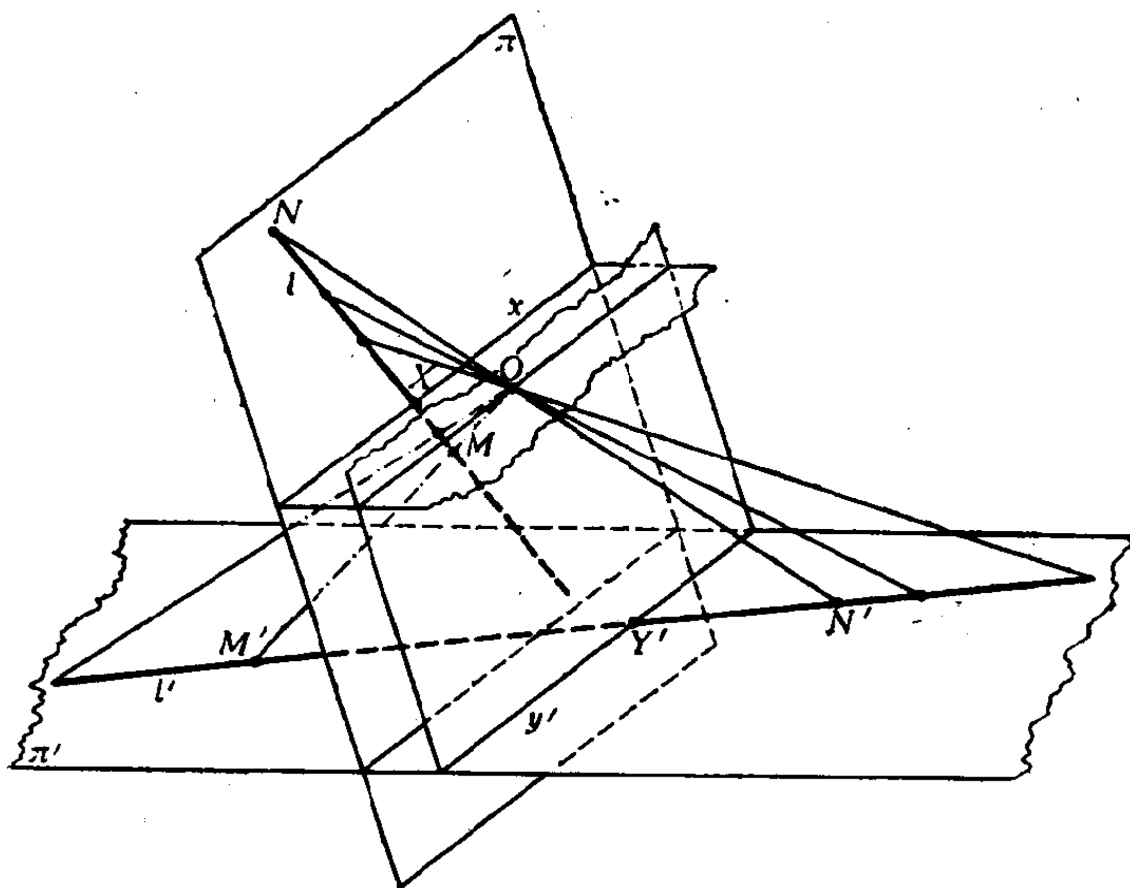



图 40

直线 $l'$ 跑向无穷远(其方向依赖于$M$趋向$X$的方向(参看图40))。类似地，如果$M$在 $l$ 上无论朝哪一个方向无限远移，则它的投影都趋向于$l'$同 $y'$的交点 $Y'$(参看图40)。

无穷远点的引进，使得我们必需补充共线四点的交比的定义. 注意：如果$D$是直线 $AB$ 的无穷远点，则自然可以命比值 $AD/BD$ 等于 1（由于当$M$趋向无穷远点$D$，即当$M$沿着 $AB$ 朝随便哪个方向跑向无穷远时，比值$AM/BM$ 都趋向于极限 1 ）. 于是,如果$D$是无穷远点,那么交比$(AC/BC)/(AD/BD)$就同单比 $AC/BC$ 一致。容易看到，即使点 $A,B,C,D$ 中有一个是无穷远点，或者它的投影是无穷远点，中心射影的性质 C 仍然成立。

无穷远点和无穷远直线的引进，使得我们能够把可以用类似的方法证明的一些特殊的命题，归并在一个命题中. 这是因为就所讨论的中心射影来说，虚构的无穷远点同真点是平等的；一种类型的点可以变成另一种类型的点. 例如，前面所列的德札尔格定理的特殊情形，都可包含在这个定理的原来的陈述(问题22)中，只要把直线 $AA_1,BB_1,CC_1$的交点、以及三角形 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$的对应边的交点解释成通常点或无穷远点即可。

用添加虚构的无穷远点和一条虚构的无穷远直线的方法来扩充通常的平面，所得到的新“平面”称为射影平面。

我们想要指出所虚构的无穷远点的两种用途之间的基本差别，这两种用途是：1.创造一个方便的术语以表示有关中心射影的某些事实(参考上面讲的)；2.引进射影平面。

射影平面的概念不仅仅是一个术语. 它是在数学的抽象化的道路上所迈出的一步，这种抽象化的结果之一是产生了一个新的数学概念：一张平面，它除了包含中学几何中熟知

的点外，还包含添加的点，即无穷远点。（无穷远点同其它的点有同等的地位，因为中心射影能够把一种类型的点变成另一种类型的点。）应该强调指出，射影平面完全同通常的"欧几里得"平面（或第二章中讨论的"反演平面"①）一样站得住脚。说到底，在欧几里得平面上，直线都可以无限延长，因此欧几里得平面的概念也不过是一种数学的抽象，在物质世界中并没有实际的类似物，而对它的完美的描述，是由刻划这种平面的几何学的一组公理达到的。对"平面"这一术语的各种不同的解释，导致我们对公理的不同的选择。例如，在欧几里得平面中并不成立的公理："任意两条（不同的）直线必交于唯一的一点"，而在射影平面中它却是成立的（事实上，在欧几里得意义下平行的两条直线交于射影平面上的一个无穷远点，通常的直线和无穷远直线交于该通常直线上的无穷远点）。在各种不同的并且是合理的平面概念的定义中，每一种平面都以特定的公理系统为其标志。根据我们要解决的问题的类型，可以发现用这种或那种方式解释"平面"这个词是有益的。一个例证是在第二章中对反演所作的研究②，在那里我们利用"无穷远点"的方式和射影平面的情形完全不同。所得到的"平面"既不同于欧几里得平面，也不同于射影平面，但这里并没有"好"或"坏"的差别。

指出下面这一点是恰当的：在不包含中心射影的问题中，引进"无穷远的"点和直线可能也有用处。例如，把一个平移当作中心在对应于平移方向的无穷远点、系数是1的中心相似往往是有用的（为说明这一点，考虑图形$F$在一串中心相似下的象$F_1, F_2, F_3, \cdots$，这些中心相似把$F$的某一

① 参看《几何变换》第二册。——英译者

② 参看《几何变换》第四册。——英译者

个点$A$映射成某个点$A'$；则当这些相似变换的中心$O_i$（$i=1,2,3,\cdots$）沿着直线$AA'$向无限远处移动时，图形$F_i$趋向于图形$F'$，$F'$是从$F$经过由线段$AA'$所确定的平移得到的，并且系数

$$\frac{O_iA'}{O_iA} \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

趋向于1（参看图41））。作为这种看法的一个应用，在包含

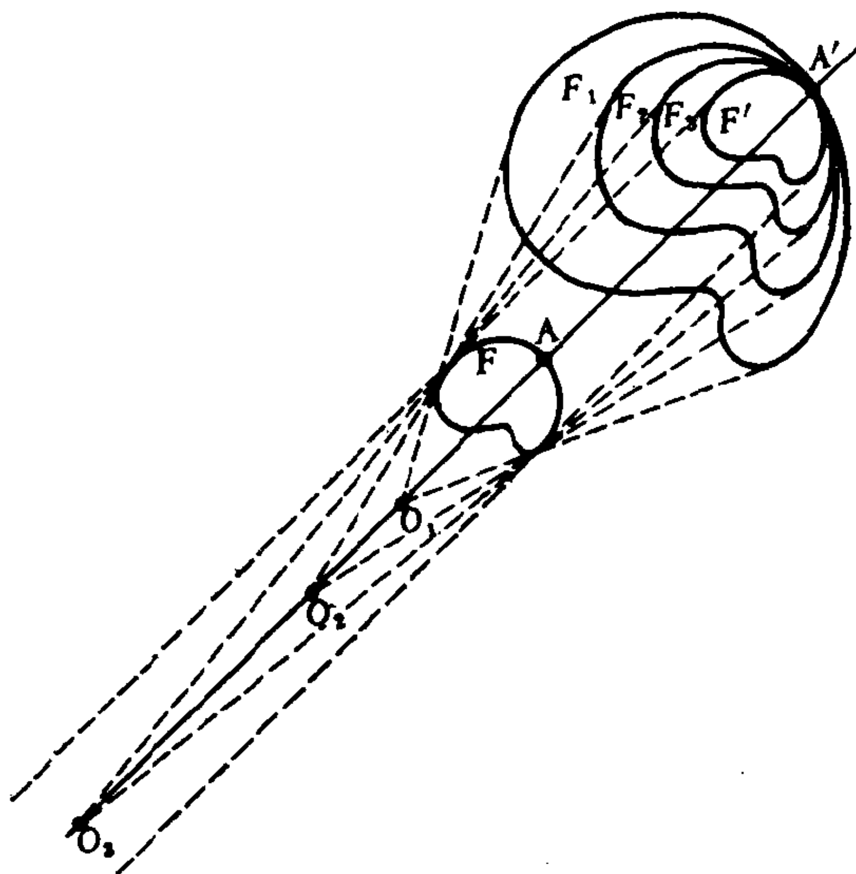



图 41

中心相似图形的一些定理中，我们就不再需要把出现的一些特殊情形单独分出来。例如，我们现在可以断定任意两个圆以两种方式中心相似（参看《几何变换》第二册，第一章，§1）。两个中心相似变换（中心可以是通常的点或无穷远点）的乘积还是一个中心相似变换（中心是通常的点或无穷远点；参看《几何变换》第一册，第一章，§1和《几何变换》第二册，第一章，§1）。关于三相似中心定理（《几何变换》第二册，第

一章，§1)现在可以陈述成如下简洁的形式：三个两两中心相似的图形的三个相似中心共线．这个结论包括了：一个中心是无穷远点(三个图形中有两个全等)的情形，三个中心都是无穷远点、并且轴是无穷远直线(三个图形两两全等)的情形，最后，还有三个中心重合的情形．如果我们运用现在的观点，则三个圆总有六个相似中心，三个一组地落在四条相似轴上(对于这个定理所包含的特殊情形，参看《几何变换》第二册，第一章，§1)．《几何变换》第二册，第一章，§2中的定理2现在有一个比较简单的形式，因为我们可以把滑动反射看成伸缩反射的特殊情况，所以当$F$由一个滑动反射映射到$F'$上时，这种情形无需另外单独处理．从我们现在的观点来看，在《几何变换》第一册，第二章，§2中的定理2，是《几何变换》第二册，第一章，§2中定理2的特殊情形(它说明了这两个定理的陈述和证明为何会那么相似)．有时候，把平移看成中心在无穷远点的旋转也是有益的，这个无穷远点所对应的方向垂直于该平移的方向．于是，关于正向运动(即旋转和平移；参看《几何变换》第一册)的乘积的所有定理，都可以用一个定理概括起来．

32．(a) 设$ABCD$是给定的平行四边形．试证明：如果直线$DM$在边$AB$上截得线段$AM=AB/n$，则它从对角线$AC$上截得线段$AN=AC/(n+1)$(图42表示$n=2$的情形)．如果我们把这个图形所在的平面投影到另一个平面，使得直线$AB$平行于该平面的特殊直线，试问这个命题将取什么形式？

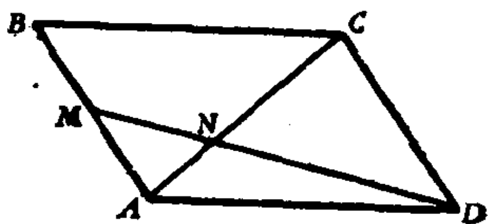


图 42

(b) 设给定两条平行直线 $l$ 和 $l_1$ 以及 $l$ 上的一个线段 $AB$。试只用直尺把线段 $AB$ 分成 $n$ 等分。

33. 如果我们对图14作投影，使得直线 $ABE$ 是特殊直线，则关于该完全四边形的定理（参看问题14及其后面的注释）将取什么形式？

34. (a) 试证明梅内劳斯(Menelaus)定理：设 $M,N,P$ 分别是三角形 $ABC$ 的边 $AB,BC,CA$(或其延长线)上的点(看图43)，则 $M,N,P$ 共线的充分必要条件是

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1.$$

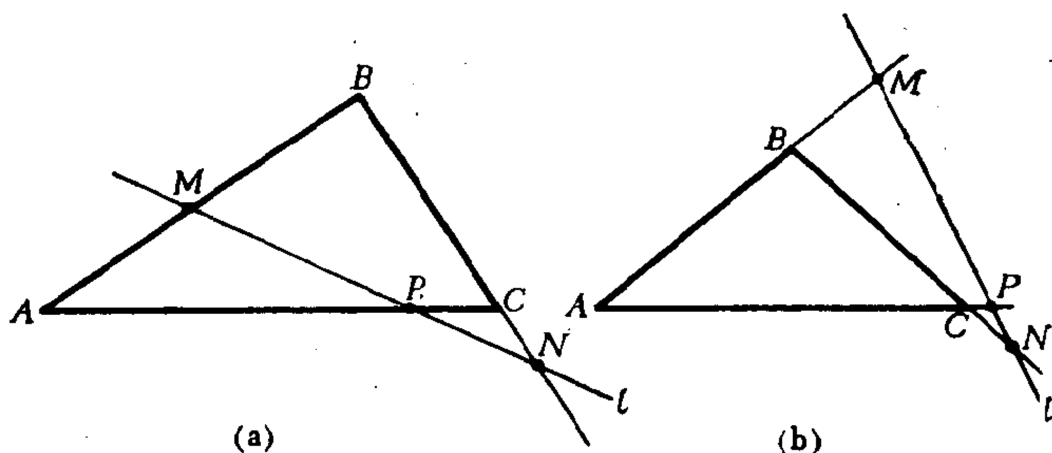



图 4

(b) 试证明塞瓦定理：设 $M,N,P$ 分别是三角形 $ABC$ 的边 $AB,BC,CA$(或其延长线)上的点(看图44)，则三条直

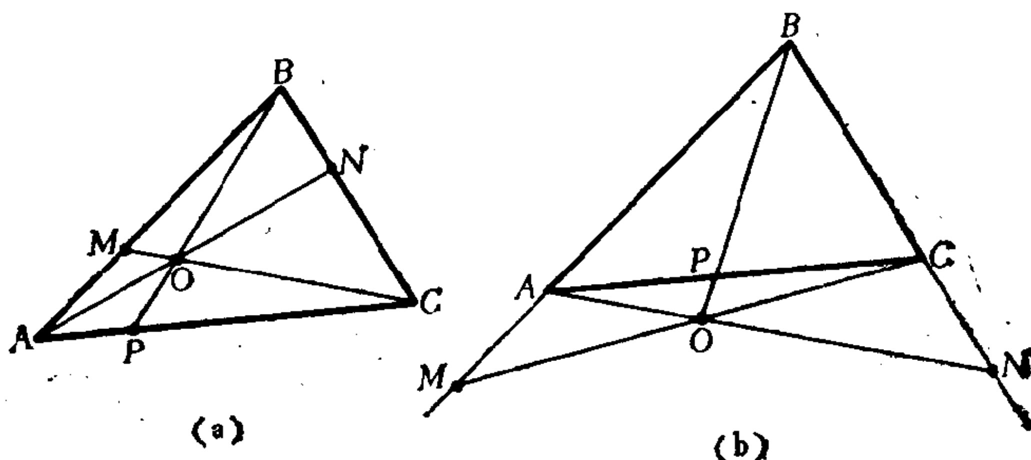



图 44

线 $AN, BP, CM$ 共点或平行的充分必要条件是

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = -1.$$

还可以参看《几何变换》第二册，第一章，§1中的问题27(a)，(b)和本书中的问题16。关于梅内劳斯定理和塞瓦定理之间的联系，参看本书§4中的问题66。

不难看到，对于任意三角形 $ABC$，如果点 $M, N, P$ 共线，则这三个点中或有两个点、或没有一个点在这三角形的边的内部[图43(a)，(b)]。因此，在三个单比 $AM/BM$，$BN/CN$，$CP/AP$ 中，或者有两个是负的，或者全是正的，所以这三个单比的乘积必定是正的。类似地，如果直线 $AN$，$BP$，$CM$ 共点或平行[图44(a)，(b)]，则在三个点 $M, N, P$ 中，或所有的点或只有一个点在这三角形的边（作为线段）的内部。因此，在三个分比 $AM/BM$，$BN/CN$，$CP/AP$ 中，或有两个是正的，或全是负的，所以这三个单比的乘积必定是负的。

在证明三点共线或三线共点时，常常应用梅内劳斯定理和塞瓦定理。应用梅内劳斯定理可以解出《几何变换》第二册中的问题7，16，61和本书中的问题14，21(b)，22，27，28，38(b)，45，46，68，71，73(a)，(b)以及其它问题；应用塞瓦定理可以证明三角形的中线、高线、角平分线各自都是共点的，并解决《几何变换》第一册中的问题43(a)，(b)，《几何变换》第二册中的问题14(b)，(c)和本书中的问题8，13，21(a)，22，25，26，38(a)，39(a)，(b)，40(a)，(b)，47，50，57，70以及其它问题。(同样，在问题60，62—64，69—74中要求陈述的许多定理也可以用塞瓦定理和梅内劳斯定理证明。我

们建议读者用这些定理去证明各个结果。）

35．试证明：假若$E$和$F$是一个（任意）四边形的对边$AB$和$DC$，$AD$和$BC$的交点，则有

$$\frac{AE\cdot CE}{BE\cdot DE}=\frac{AF\cdot CF}{BF\cdot DF}.$$

现在我们来证明下列重要结果。

**定理1** 设$A,B,C,D$是平面$\pi$上的四个点，其中没有三个点共线，又设$M,N,P,Q$是平面$\pi'$上的四个点，其中也没有三个点共线。则$\pi$和$\pi'$可以如此放置在空间中，使得从$\pi$到$\pi'$有一个中心（或平行）射影，它把四边形$ABCD$变成与$MNPQ$相似的四边形$A'B'C'D'$①。

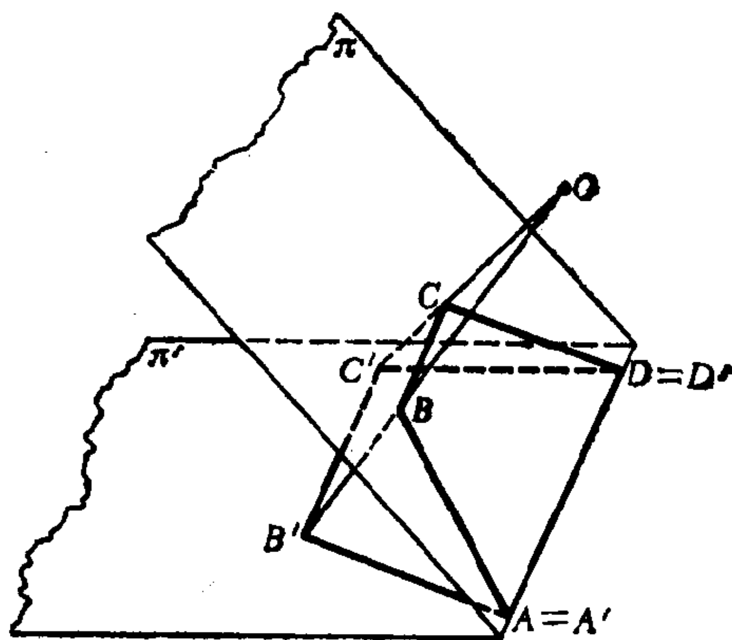



图 45

① 更准确地说，四边形$ABCD$的顶点可以映射到与$MNPQ$相似的四边形$A'B'C'D'$的顶点上（参看问题21(a)解答中的注）。

我们先在 $AD \parallel BC$, $MQ \parallel NP$（即四边形 $ABCD$ 和 $MNPQ$ 是梯形）的特殊情况下，证明这个定理。在 $\pi'$ 上引进一个相似于 $MNPQ$ 的梯形 $A'B'C'D'$，并使得 $A'D' = AD$。然后在空间中移动平面 $\pi$，使得线段 $AD$ 和 $A'D'$ 重合，并且点 $B$ 和 $C$ 不在平面 $\pi'$ 上（图45）。用直线连接 $B$ 和 $B'$，$C$ 和 $C'$，则直线 $BB'$ 和 $CC'$ 共面；其实，$BC \parallel AD$，$AD \parallel B'C'$，从而 $BC \parallel B'C'$，所以它们共面。假设 $O$ 是直线 $BB'$ 和 $CC'$ 的交点，则以 $O$ 为中心的中心射影把 $ABCD$ 变成 $A'B'C'D'$；如果 $BB' \parallel CC'$，则沿着由这些直线确定的方向的平行射影把 $ABCD$ 变成 $A'B'C'D'$。

下面我们来证明可以把一般情形化成上述的特殊情形。设 $ABCD$ 和 $MNPQ$ 是分别在 $\pi$ 和 $\pi'$ 上的两个四边形（图46）[1]。假如有 $\pi$ 到 $\pi'$ 的某一个中心（或平行）射影，把四边形 $ABCD$ 变成相似于 $MNPQ$ 的四边形 $A'B'C'D'$，我们可以证明 $ABCD$ 和 $MNPQ$ 确定 $\pi$ 的特殊直线。为此，设 $E$，$E'$，$R$ 分别是四边形 $ABCD$，$A'B'C'D'$，$MNPQ$ 的对边 $AB$ 和 $CD$，$A'B'$ 和 $C'D'$，$MN$ 和 $PQ$ 的交点，根据中心射影的性质A，点 $E$ 的象是 $E'$。如果 $X_1'$ 是 $A'B'$ 的无穷远点，则由中心射影的性质C，它是 $AB$ 上一点 $X_1$ 的象，点 $X_1$ 应使得

$$\frac{AE/BE}{AX_1/BX_1} = \frac{A'E'/B'E'}{A'X_1'/B'X_1'} = \frac{A'E'}{B'E'} = \frac{MR}{NR}$$

（由于 $A'X_1'/B'X_1' = 1$，看第50页）。从这个关系式我们可以确定比值 $AX_1/BX_1$（包括大小和符号！），从而确定 $X_1$。类似地，关系式

① 图46中的四边形 $ABCD$ 和 $MNPQ$ 是凸的．然而如果其中有一个或两个不是凸的，证明仍然适用．

$$\frac{CE/DE}{CX_2/DX_2}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{PR}{QR}$$

确定$DC$上的一点$X_2$，它被映射为$D'C'$上的无穷远点$X'_2$①．直线$X_1X_2$就是所要的$\pi$上的特殊直线。注意，$X_1$和$X_2$可以由给定的四边形$ABCD$和$MNPQ$确定。根据类似的道理，我们可以确定$\pi'$上的特殊直线$Y'_1Y'_2$（参看图46）。点$Y'_1$和$Y'_2$由关系

$$\frac{AE}{BE}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1} \quad 和 \quad \frac{CE}{DE}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2}$$

确定。

经过点$A$和$B$分别作平行于特殊直线$X_1X_2$的直线，它们与$CD$的交点用$K,L$表示。根据中心射影的性质B，平行线$AK$和$BL$变成平行线。这意味着我们的中心射影把梯形$ABLK$变成梯形$A'B'L'K'$（这里$A'K'\parallel B'L'\parallel Y'_1Y'_2$）。现在，我们可以从四边形$ABCD$和$MNPQ$找出梯形$ABLK$和相似于$A'B'L'K'$的梯形$MNTS$。为此，只须在直线$MN$和$PQ$上找出点$Z_1$和$Z_2$，使得

$$\frac{MR/NR}{MZ_1/NZ_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1}=\frac{AE}{BE},$$

$$\frac{PR/QR}{PZ_2/QZ_2}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2}=\frac{CE}{DE},$$

并作$MS\parallel NT\parallel Z_1Z_2$。

---

① 如果$E$映射到$A'B'$的无穷远点(即如果$A'B'\parallel C'D'$)，则代替$AB$和$CD$，我们考虑$AD$和$BC$。如果$AD$同$BC$的交点$I$和$E$都映射到无穷远点(即如果$A'B'C'D'$是一个平行四边形)，则$\pi$的特殊直线是$EI$，在这时不必计算线段的比值就可以证明定理1(如果读者能争取证明这一点，将会是有益的)。

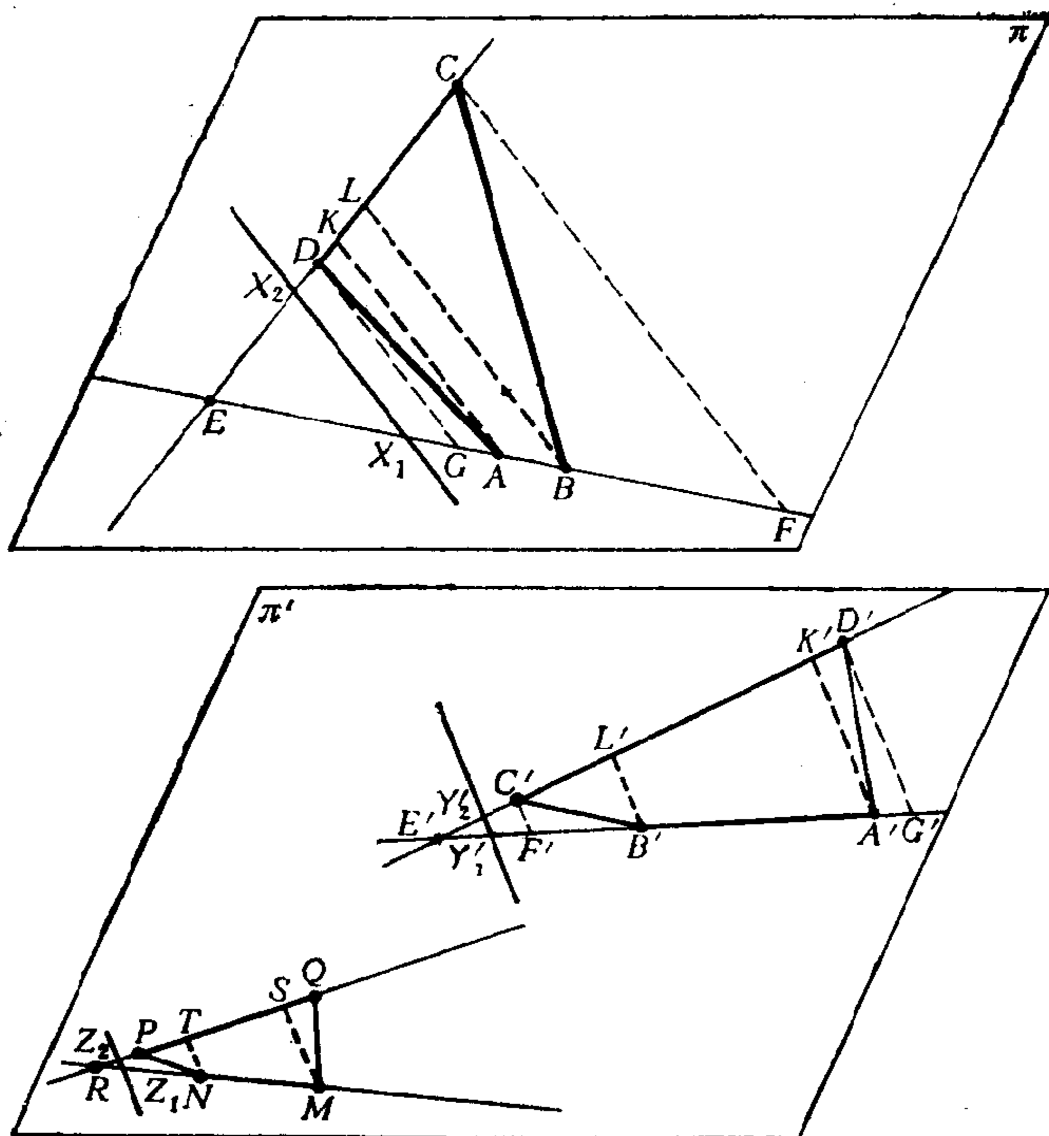



图 46

上面所证明的定理1的特殊情形，保证了把梯形 $ABLK$ 变成相似于 $MNTS$ 的梯形$A'B'L'K'$ 的中心（或平行）射影的存在。为证明我们的定理，必须证明这个射影把$ABCD$变成$A'B'C'D'$，即把点$C, D$变成点$C', D'$。

注意，$\pi$中相对于我们的射影的特殊直线就是上面找出的直线$X_1X_2$；事实上，这条特殊直线应平行于$AK$和$BL$（中

心射影的性质B[1]），并经过$X_1$（因为$AB$和$KL$的交点$E$映射为$A'B'$和$K'L'$的交点$E'$，并且使得适合$(AE/BE)/(AX_1/BX_1)=A'E'/B'E'$的点$X_1$被映射成无穷远点）。用几乎是同样的方法可以证明$\pi'$的特殊直线是$Y_1'Y_2'$。由于$E$，$X_2$和$KL$的无穷远点分别映射为$E'$，一个无穷远点和$K'L'$的点$Y_2'$，根据中心射影的性质C，可知点$C$的象是$K'L'$的点$\overline{C}$，$\overline{C}$应满足

$$\frac{EX_2/CX_2}{1}=\frac{1}{E'Y_2'/\overline{C}Y_2'},$$

因此

$$\overline{C}Y_2'=E'Y_2'\cdot\frac{EX_2}{CX_2}.$$

下面来证明$\overline{C}$和$C'$重合。为此，作一个中心（或平行）射影再跟着作一个相似变换，把图46中的梯形$CDGF$（$CF \parallel DG \parallel X_2X_1$）变成梯形$C'D'G'F'$（$C'F' \parallel D'G' \parallel Y_2'Y_1'$）；从上面已经证明的部分结果来看，这是可能的。这个映射把$E$变成$E'$，把$CD$的点$X_2$变成$C'D'$的无穷远点$X_2'$，并且把$CD$的无穷远点$Y_2$变成$Y_2'$（因为根据点$X_2$和$Y_2'$的定义，

$$(CE/DE)/(CX_2/DX_2)=C'E'/D'E',$$

$$CE/DE=(C'E'/D'E')/(C'Y_2'/D'Y_2')).$$

因此，由中心射影的性质C，

$$\frac{EX_2/CX_2}{1}=\frac{1}{E'Y_2'/C'Y_2'},$$

---

[1] 只要注意我们是如何作把梯形变成梯形的中心（或平行）射影的（参看定理1的证明），也可以得到这个结论。

所以 $$C'Y'_2 = E'Y'_2 \cdot \frac{EX_2}{CX_2}.$$

从而$\bar{C}$和$C'$重合。用几乎是同样的方法可以证明：把 $ABLK$

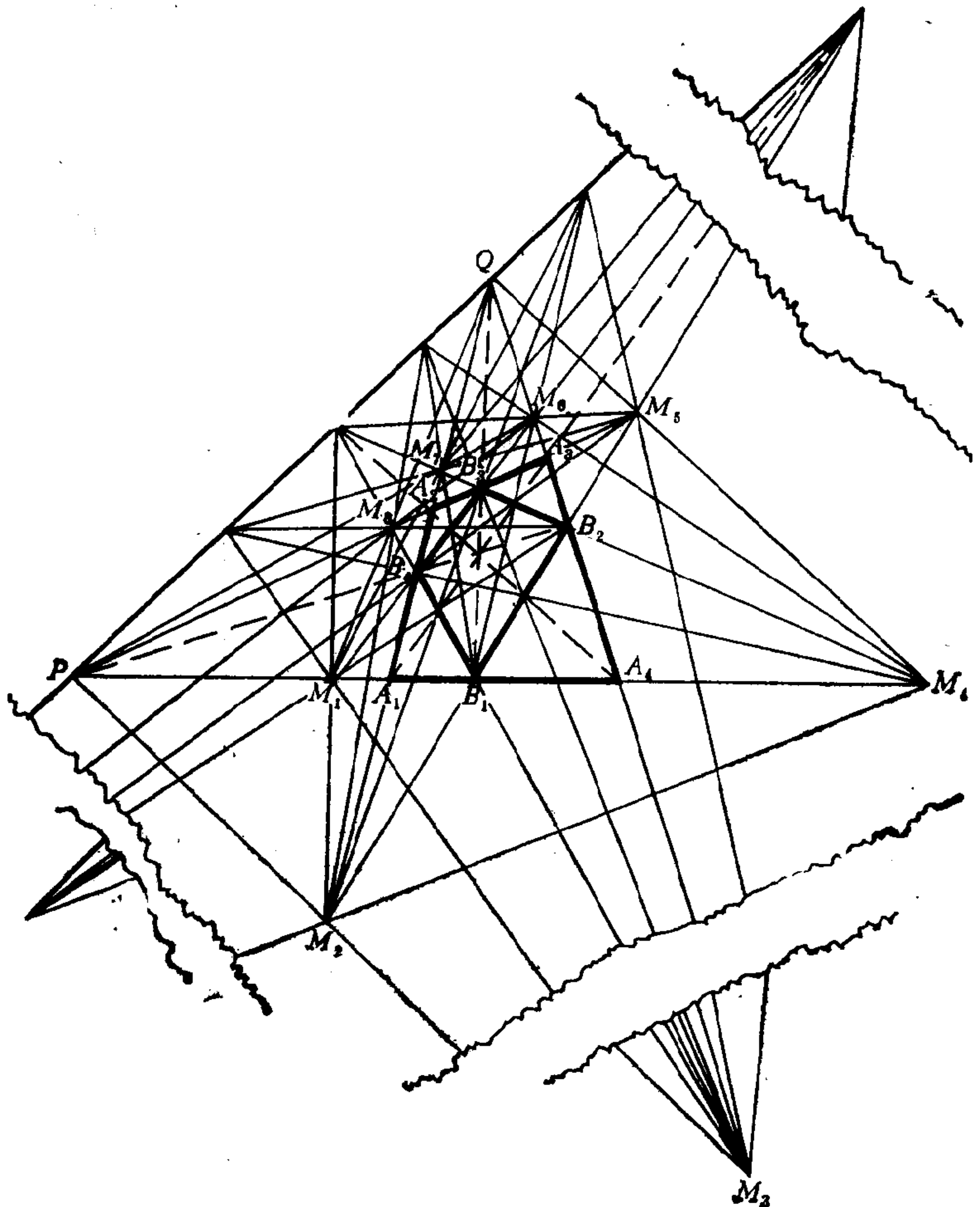



图 47

变成$A'B'L'K'$的中心(或平行)射影，把$D$映射到$D'$。至此我们看到，所说的射影确实把四边形$ABCD$变成四边形$A'B'C'D'$。这就是所要证的。

在$A,B,C,D$或$A',B',C',D'$中的某些点是无穷远点时，不难修改定理1的证明。

36．设$A_1A_2A_3A_4$是一个四边形，其对角线交于点$N$，并设两对对边交于点$P$和$Q$；设$B_1,B_2,B_3,B_4$是四边形的边同直线$NP$和$NQ$的交点。用$M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,M_7,M_8$表示$A_1A_2A_3A_4$的边同内接四边形$B_1B_2B_3B_4$的边的交点，如图47。试证明：

(a) 直线$M_1M_5,M_2M_6,M_3M_7,M_4M_8$经过$N$。

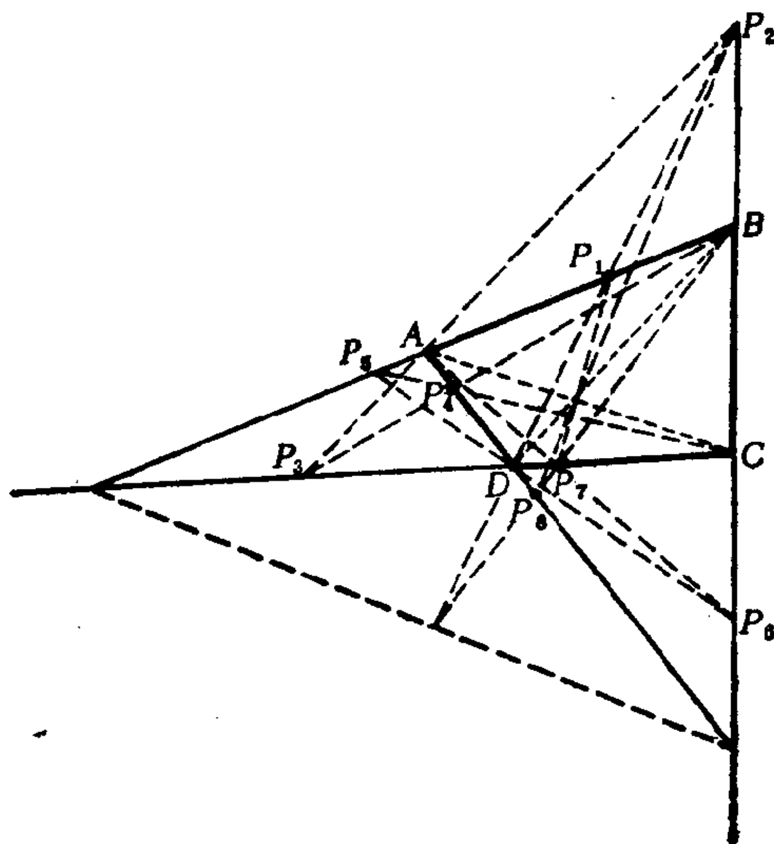



图 48

(b) 直线 $M_2M_3$ 和 $M_6M_7$ 经过$P$；直线 $M_1M_8$ 和 $M_4M_5$ 经过$Q$。

(c) 直线 $M_1M_2, M_3M_8, M_4M_7, M_5M_6$ 经过$PQ$与对角线$A_2A_4$的交点；直线 $M_3M_4, M_2M_5, M_1M_6, M_7M_8$经过$PQ$与对角线 $A_1A_3$ 的交点。

(d) 四个四条直线的组

$$M_1M_3,\ M_5M_7,\ B_4M_4,\ B_2M_8;$$
$$M_2M_4,\ M_6M_8,\ B_4M_5,\ B_2M_1;$$
$$M_3M_5,\ M_1M_7,\ B_1M_6,\ B_3M_2;$$
$$M_4M_6,\ M_2M_8,\ B_1M_7,\ B_3M_3;$$

中每一组直线都交于一个点，并且这四个点在$PQ$上。

37. 设$P_1$表示四边形$ABCD$的边$AB$上的一点(图48)。又设$P_2$表示$P_1$从中心$D$到直线$BC$上的射影；$P_3$表示$P_2$从$A$到直线$CD$上的射影；$P_4$表示$P_3$从$B$到直线$DA$上的射影；$P_5$是$P_4$从$C$到直线$AB$上的射影，等等。试证明：

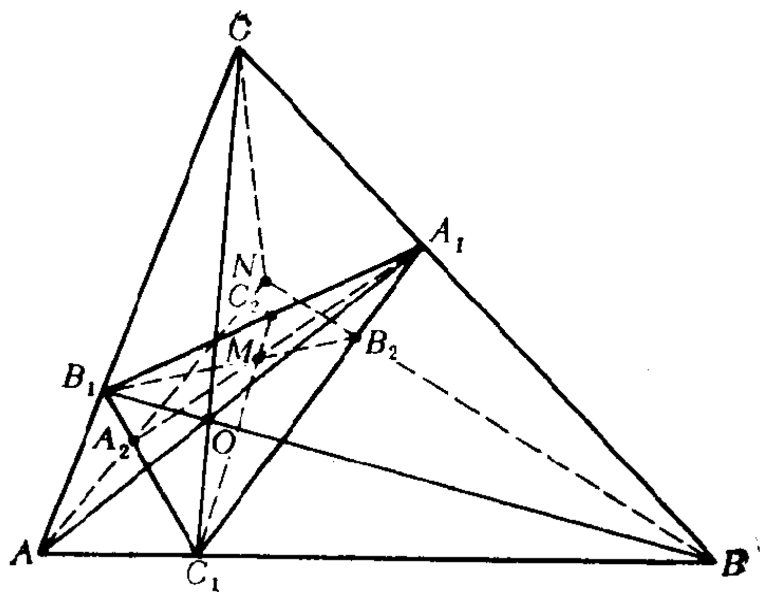
(a) 边$AB$上的点$P_{13}$(围绕四边形三周后得到的点)同给定的点$P_1$重合（由此，点$P_{14}$同$P_2$重合，点$P_{15}$同$P_3$重合，等等)。

(b) 直线 $P_1P_7, P_2P_8, P_3P_9$,等等,经过四边形的对角线的交点。

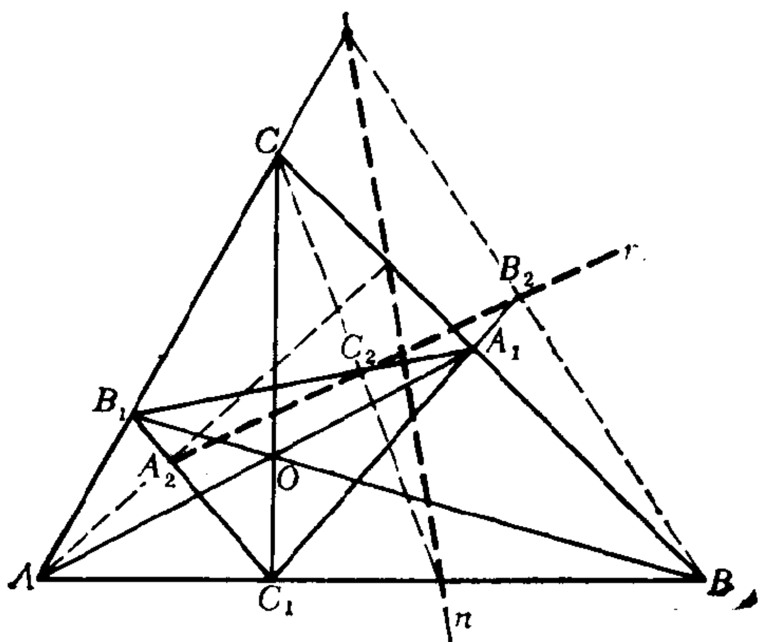
(c) 直线 $P_1P_2$ 和$P_7P_8$，$P_2P_3$和$P_8P_9$，$P_3P_4$和$P_9P_{10}$，等等，交于四边形对边交点的连线上。

38. 设$O$是三角形$ABC$所在平面上的一点,$A_1, B_1, C_1$分别是三角形中$A, B, C$的对边同相应的直线$AO, BO, CO$的交点(图49)。试证明：

(a) 如果$A_2, B_2, C_2$是$\triangle A_1B_1C_1$的边$B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$上的点，它们使得三条直线$A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$共点，则直线$AA_2$,




(a)




(b)

图 49

$BB_2$, $CC_2$也共点[图49(a)]。

(b) 如果$\triangle A_1B_1C_1$的边$B_1C_1$, $C_1A_1$, $A_1B_1$上的点$A_2$, $B_2$, $C_2$共线，则直线$AA_2$, $BB_2$, $CC_2$同$\triangle ABC$的对边的交点也共线[图49(b)]。

到目前为止，我们只考虑了一个平面$\pi$到另一个平面$\pi'$的映射。下面讨论把$\pi$变到它自身的变换，其定义如下：在空间中任意移动平面$\pi$，然后从某一个中心$O$把它射影到它的原来的位置。这种变换我们称之为平面$\pi$到它自身的中心射影。相似变换是这种变换的一个特殊情形；如果平面在移动以后的新位置同它原先的位置平行，则平面到它自身上的中心射影必是相似变换。

从中心射影的性质可以推出，平面$\pi$到它自身的中心射影把直线变成直线，只有特殊直线是例外，它变成无穷远直线。在平面$\pi$的不包含特殊直线的那一部分中，每一条直线都变成直线。

平面的变换如果将穿过该平面的某个确定部分的直线变成直线，就称为**射影变换**或**射影**①。每个仿射变换都是射影变换，但是反过来不对；例如，平面到它自身的中心射影是射影变换，但一般说来不是仿射变换。

下面的基本定理阐明平面射影变换的性质。

**定理2** 平面的每个射影变换可以用平面到它自身的一个中心（或平行）射影再跟着作一个相似变换实现。

定理 2 的证明类似于 § 1 定理 2 的证明。

我们将就射影变换的定义中所提到的平面的确定部分是一个凸四边形（譬如说，笔记本中的一页）② 的情形，给出定

---

① 射影也能够定义为射影平面$\pi$（参看第50页）到它自身上的、将直线变成直线的 1 - 1 变换.这个定义同仿射变换的定义（参看第21页）的差别就在于这里的$\pi$表示射影平面而不是通常的平面.

② 这个假定并不限制定理的一般性；事实上，在任意一个区域$G$中可以选取一个（小的）四边形$ABCD$.与$ABCD$相交的每一条直线必定都通过$G$.但是另一方面，把通过$G$的直线变成直线的每个变换必然把与这个（凸）四边形$ABCD$相交的直线变成直线.

理 2 的一个证明.

设射影变换把四边形 $ABCD$ 变成四边形 $A'B'C'D'$(图 50). 定理 1 告诉我们,用平面到它自身的一个中心(或平行)射影,再跟着作一个相似变换,把 $ABCD$ 变成$A'B'C'D'$,这是可能的. 故,若我们能够证明把 $ABCD$ 变成 $A'B'C'D'$ 的射影变换是唯一的,定理 2 也就证明了.

射影变换被一个四边形的顶点的象所确定,这个事实的证明极其类似于§ 1 定理 3 的证明,所以我们只是粗略地说说这个证明. 设 $E,F$; $E',F'$ 分别是四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 的边 $AB$ 和 $CD$, $AD$ 和 $BC$; $A'B'$ 和 $C'D'$, $A'D'$ 和$B'C'$ 的延长线的交点(这些交点中有一些可以是无穷远点), 而 $G$ 和 $G'$ 是它们的对角线的交点. 由于 $AB$ 变成 $A'B'$, $CD$ 变成 $C'D'$, 可知 $E$ 变成 $E'$; 类似地, $F$ 变成 $F'$, $G$变成 $G'$. 因此直线 $EG$ 和 $FG$ 变成直线 $E'G'$ 和$F'G'$.

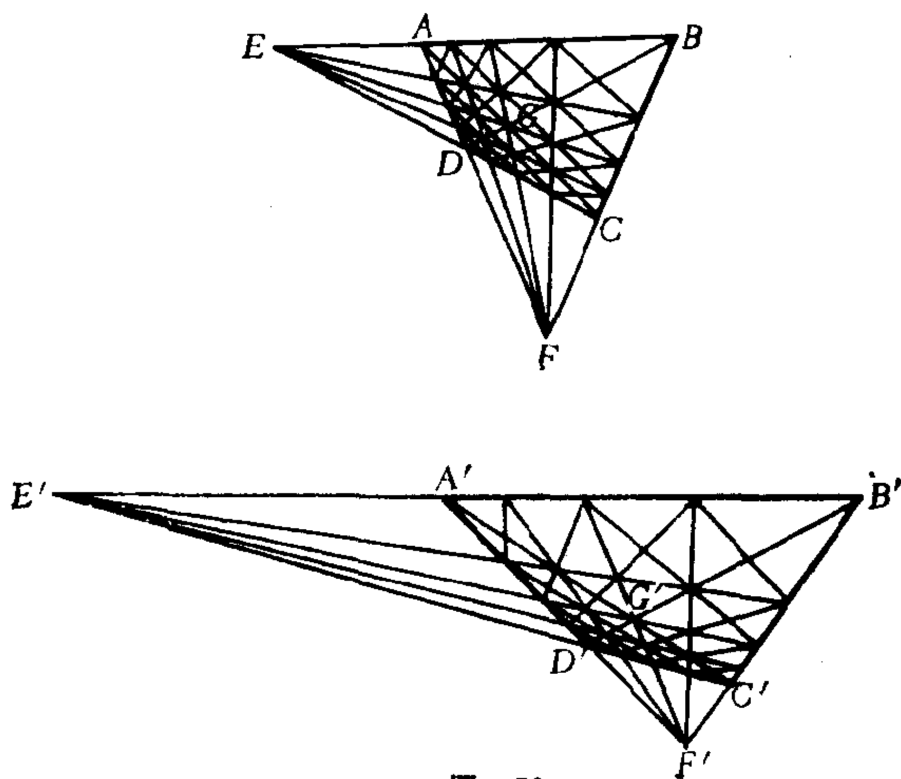


图 50

直线 $EG$ 和 $FG$ 把四边形 $ABCD$ 分成四个小四边形；我们的射影变换把每一个小四边形变成已知的四边形。把小四边形的对角线的交点同 $E$ 和 $F$ 用直线连结起来，并继续上述过程，我们得到 $ABCD$ 中的一个直线网，在我们的变换下这个直线网在 $A'B'C'D'$ 中的象网是知道的（参看图50）。这个网可以做得任意密。（容易看到，我们的图形所在的平面到它自身的、把 $EF$ 变成无穷远直线的中心射影，把上面的网变成图51中的平行四边形网，这种网在§1定理3的证明中曾经出现过。于是，用类似于§1定理3的证明中的方法，就可得到将 $ABCD$ 变成 $A'B'C'D'$ 的射影变换的唯一性的证明。）①

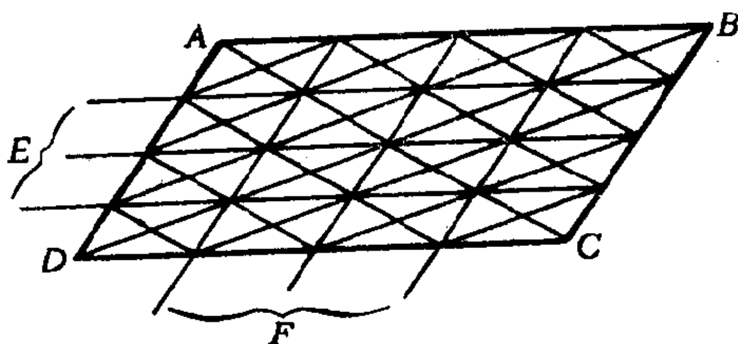



图 51

① 我们只限于讨论在确定的四边形内部的点的象，正是由于射影变换的那个定义本身就与平面的一部分有关.然而，我们注意，用与§1定理3的证明中所用的几乎相同的办法，可以把我们的网扩大到原来的四边形的外面。

## 3. 把一个圆变成一个圆的中心射影 球极平面射影

在前一节中我们曾经介绍过一些问题，通过从有关图形所在的平面到另一个平面的适当的射影，这些问题的解法可以得到简化。因此，进一步考虑这种方法的适用范围是很自然的。初等几何所研究的是由直线和圆组成的图形的性质，而中心射影保持直线，但一般不保持圆。这就可能给人一个印象：只能对不包含圆的相当少的一类问题(前一节中所有的问题都属于这个范围)运用中心射影。其实，这个印象是不正确的。在这一节中我们要说明中心射影也可以用来解决包含圆的问题。为此，先要建立下面两个结果。

**定理1** 设$S$是平面$\pi$上的一个圆，$Q$是$S$内部的一点。则存在从$\pi$到一个适当的平面$\pi'$的中心射影，它把$S$变成$\pi'$上的圆$S'$，并且把$Q$变成$S'$的中心$Q'$。

**定理1′** 设$S$是平面$\pi$上的一个圆，$l$是$\pi$上的不与$S$相交的一条直线。则存在从$\pi$到一个适当的平面$\pi'$的中心射影，它把$S$变成$\pi'$上的一个圆$S'$，并且把$l$变成$\pi'$的无穷远直线。

有几种方法可以证明这些定理。我们在这里所用的方法不是最简单的，但是由于能使我们增长见识，开阔思路，即使麻烦一点也是值得的①。这种方法以从一个球面到一个平面

① 在H.拉德梅彻(Rademacher)和O.托普利茨(Toeplitz)的著作《数学欣赏》(左平译，北京出版社，1981。——中译者)，或H.史泰因豪斯(Steinhaus)的著作《数学万花镜》(裘光明译，中国青年出版社，1953。——中译者)中，可以找到另一种证明的摘要)。

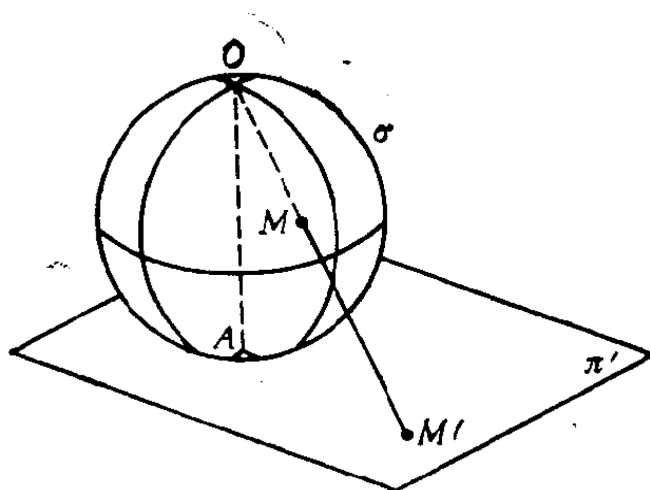



图 52

的球极平面射影及有关的结果为基础。

所谓从球面 $\sigma$ 到它在一点 $A$ 处的切平面 $\pi'$ 的**球极平面射影**，就是中心在 $O$ 点的从 $\sigma$ 到 $\pi'$ 的中心射影，这里点 $O$ 是 $\sigma$ 的过 $A$ 点的直径的另一个端点；在球极平面射影下，$\sigma$ 上的任意一点 $M(M\neq O)$ 的象是直线 $OM$ 与 $\pi'$ 的交点 $M'$（图 52）。在这个球极平面射影下，$\sigma$ 上的点 $O$ 在 $\pi'$ 上没有象。

球极平面射影的最重要的性质包含在下面的定理中。

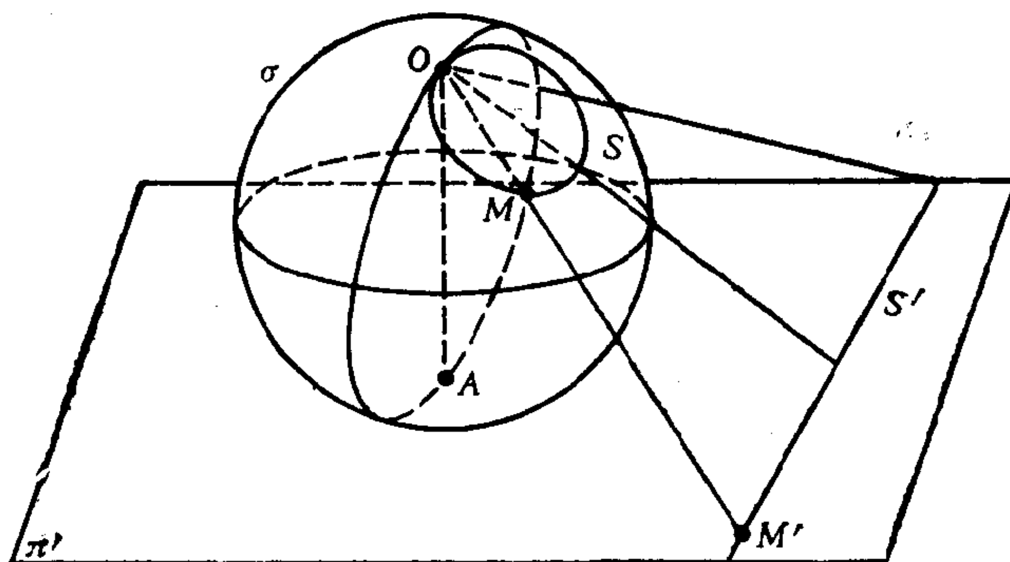
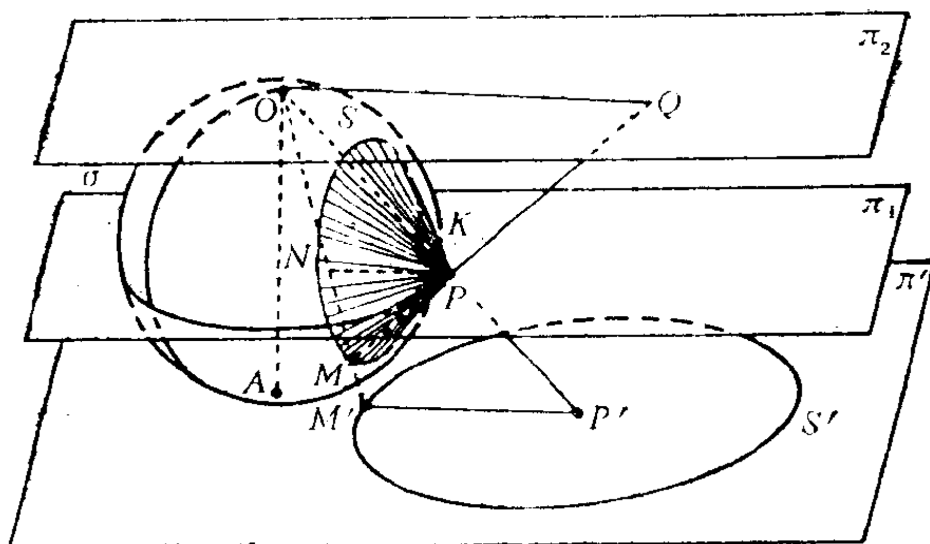


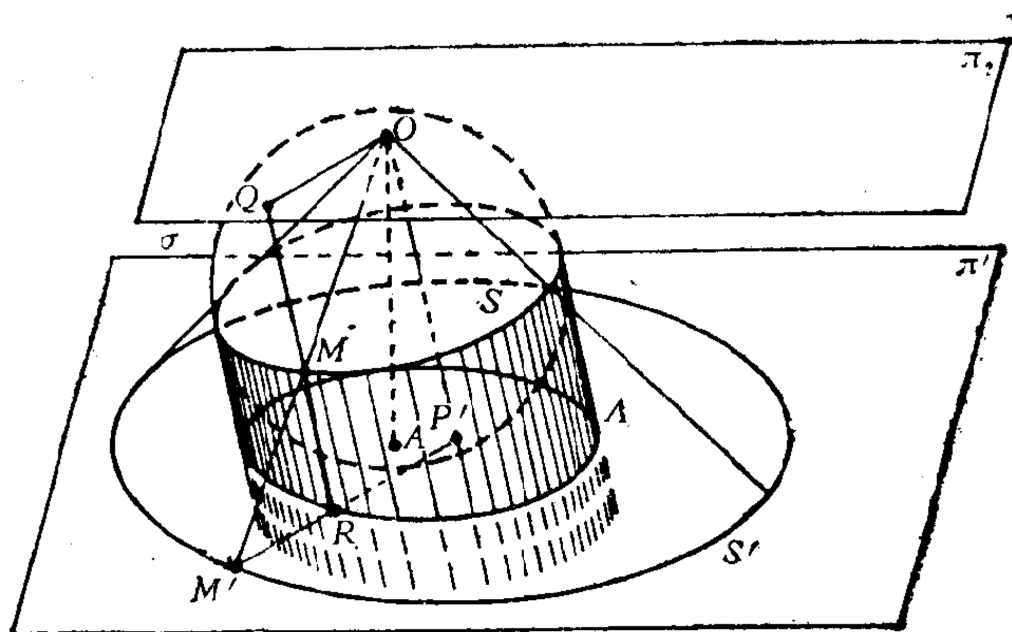

图 53

**定理2** 球极平面射影把球面 $\sigma$ 上的每一个圆变成平面 $\pi'$ 上的一个圆或一条直线，反过来，$\pi'$ 上的圆或直线的原象是 $\sigma$ 上的圆。

**证明** 显然，球极平面射影把球面 $\sigma$ 上经过 $O$ 点的圆 $S$ 变成平面 $\pi'$ 上的直线 $S'$(图53)，反过来，$\pi'$ 上的直线在球极平面射影下的原象是 $\sigma$ 上经过 $O$ 点的圆。现在假设 $S$ 是 $\sigma$




(a)




(b)

图 54

上不经过$O$点的圆；$S$可以设想为$\sigma$与它的外切圆锥面$K$[图54(a)]或外切圆柱面$\Lambda$[图54(b)]的相切曲线。假设经过$O$点和圆锥面$K$的顶点$P$的直线、或经过$O$点同圆柱面$\Lambda$的直母线平行的直线与$\pi'$的交点以$P'$表示。我们要证明球极平面射影把$S$变成$\pi'$上以$P'$为中心的圆$S'$。

设$M$是$S$上一点，$M'$是它在平面$\pi'$上的射影。我们要证明：距离$P'M'$同$S$上点$M$的选择无关(这等价于证明$M'$的轨迹是以$P'$为中心的一个圆$S'$)。首先考虑$S$是圆锥面$K$同球面$\sigma$相切的圆的情形[图54(a)]。设$\pi_1$和$\pi_2$分别是经过点$P$和$O$且平行于$\pi'$的平面，以$N$表示直线$OM$同$\pi_1$的交点，$Q$表示直线$PM$同$\pi_2$的交点。然后作$Q$和$O$的连线。直线$P'M'$, $PN$, $QO$是平行的，因为它们是平面$OPM$同平行平面$\pi'$, $\pi_1$, $\pi_2$的交线。由此可以推出$\triangle MPN \backsim \triangle MQO$和$\triangle OPN \backsim \triangle OP'M'$。从第一对三角形的相似性可以得到$PN/PM = QO/QM$。由于$QO$和$QM$都是从$Q$到球面$\sigma$的切线($QO$在与$\sigma$相切的平面$\pi_2$上；$QM$则是外切于$\sigma$的圆锥面$K$的直母线)，所以$QO = QM$。从而$PN = PM$。这就证明了线段$PN$的长度与$S$上$M$的选取无关(对$S$上所有的$M$, $PM$是常数)。又从第二对三角形的相似性可以推出$P'M'/PN = OP'/OP$，所以

$$P'M' = PN \cdot \frac{OP'}{OP}.$$

这说明$P'M'$确实跟$M$的选取无关，这就是我们所要证的结论。

假设$S$是圆柱面$\Lambda$同球面$\sigma$相切的圆[图54(b)]，过$M$作圆柱面的直母线，它同平面$\pi'$和$\pi_2$(上面引进的)的交点用$R$和$Q$表示。由于$MR \parallel OP'$，$R$在线段$M'P'$上。用直

线联结$Q$和$O$，和前面一样可以断定$\triangle MRM' \backsim \triangle MQO$。由此可以推出$MR=RM'$（因为作为从$Q$到$\sigma$的切线，有$QM=QO$）。而从$\triangle OP'M' \backsim \triangle MRM'$则可以推出

$$P'M'=P'O,$$

它说明在这种情形下$P'M'$的长度也跟$S$上$M$点的选取无关。

反过来，设$S'$是平面$\pi'$上的以$P'$为中心的任意一个圆，$M'$是$S'$上的一点，$M$是$\sigma$上的一点，在球极平面射影下$M$变成$M'$。设$P$是直线$OP'$同$\sigma$在$M$的切平面$\alpha$的交点（只要这样的点存在）。和前面一样，我们可以证明$P$同$M'$在圆$S'$上的取法无关。如果对所取的$M'$，平面$\alpha$与$OP'$平行，则对$S'$上所有的点$M'$，$\alpha$都平行于$OP'$。由此我们可以推出点$M$的轨迹是$\sigma$上的一个圆$S$，$S$或是由球面$\sigma$的经过$P$点的切线组成的圆锥面$K$同$\sigma$的相切曲线，或是由平行于$OP'$的切线组成的圆柱面$\Lambda$同$\sigma$的相切曲线。

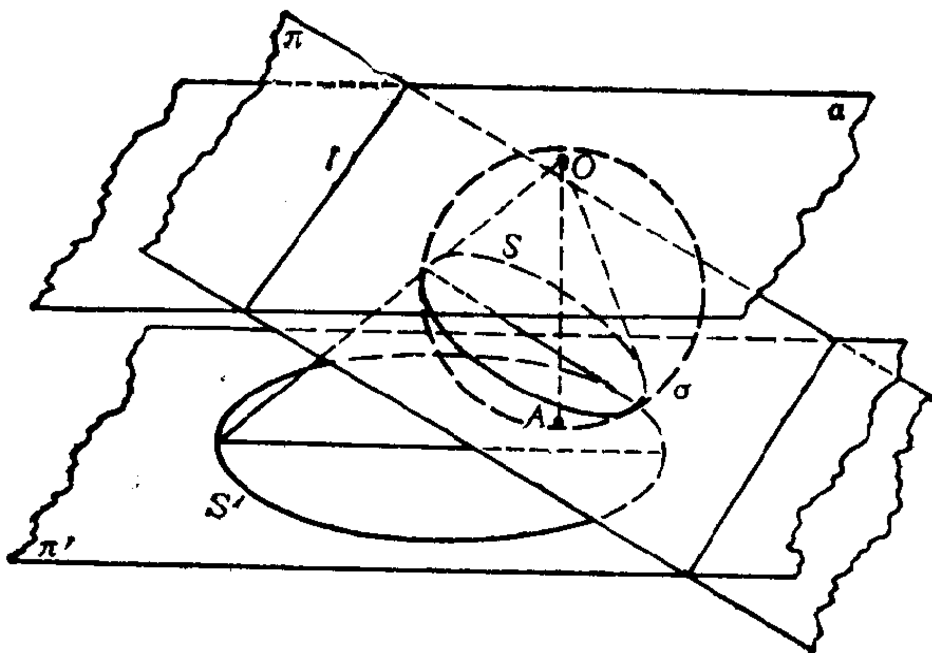



图 55

用定理 2 不难证明基本定理 1 和1′.

**定理1′的证明** 设$S$是平面$\pi$上的一个圆，$l$是$\pi$上不与$S$相交的一条直线。经过$S$作一个球面$\sigma$，经过$l$作一个与$\sigma$切于某一点$O$的平面$\alpha$。然后设$\pi'$是平行于$\alpha$并与$\sigma$相切的平面，切点$A$是$O$的对径点(图55)。以$O$为中心的从$\pi$到$\pi'$的中心射影，把$S$变成$\pi'$上的一个圆$S'$(根据定理2)，并且显然把直线$l$变成$\pi'$的无穷远直线。

**定理 1 的证明** 设$S$是一个圆，$Q$是$S$内部的一个点。命$AC$和$BD$是经过$Q$的两条弦，考虑四边形$ABCD$(图56)。用$E$和$F$表示它的对边的交点。

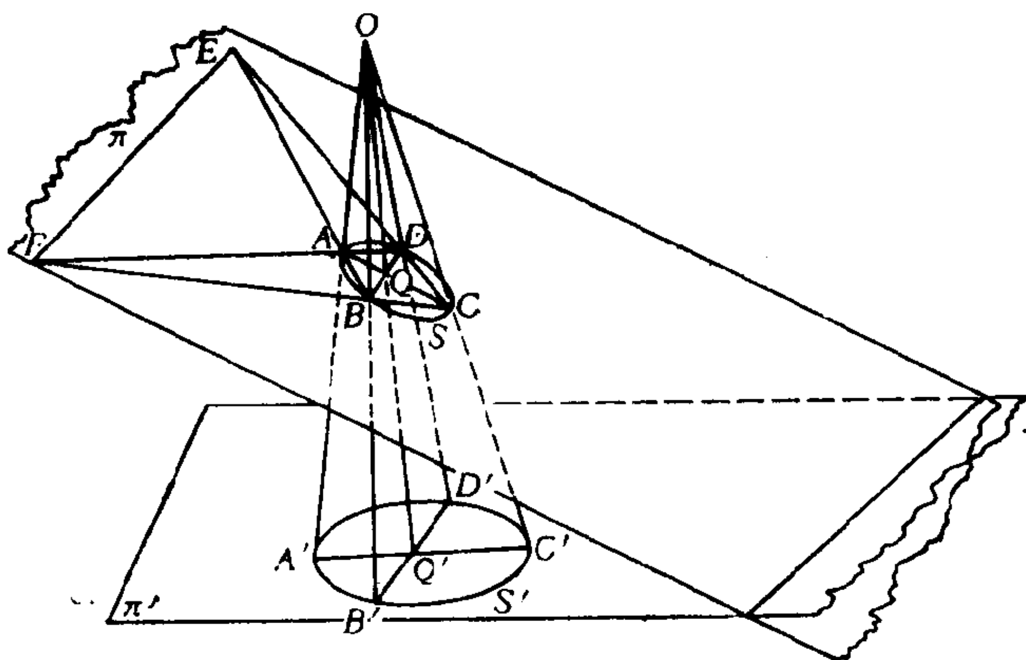



图 56

经过$E$的所有直线，或者(1)与$S$的弧$AB$有两个交点，或者(2)与$S$的弧$CD$有两个交点①，或者(3)与弧$AD$和$BC$各交于一点，或者(4)与$S$没有公共点。类似地，经过$F$

① 如果在同一段弧上的两个交点重合，则所说的直线是切线，并且情况仍然不变。

的所有直线或者(1)在弧 $AD$ 上交 $S$ 两次，或者 (2)在弧 $BC$ 上交两次[①]，或者(3)在弧$AB$和$CD$上各交一次，或者(4)与 $S$ 没有公共点。直线 $EF$ 必然属于第四类，因为如果它属于关于$E$的其它三类中的某一类，那么就会违反它是关于$F$的四类中随便哪一类所应满足的条件。

现在，将我们的图形投影到一个平面 $\pi'$ 上，使得 $S$ 变成一个圆 $S'$，而 $EF$ 变成 $\pi'$ 的无穷远直线（由定理 1'，这是可以做到的）。四边形 $ABCD$ 的象是内接于 $S'$ 的一个平行四边形 $A'B'C'D'$，即是一个矩形。由于$Q$是 $ABCD$ 的对角线的交点，可知它的象 $Q'$ 是矩形 $A'B'C'D'$ 的对角线的交点，即 $S'$ 的中心。

定理 1 和1' 使得我们能够用中心射影去解决包含圆的许多问题。其中有一些列在下面。在解决这些问题时，常常要用到一个相当明显的事实：将圆 $S$ 变成圆 $S'$ 的中心射影也将 $S$ 的切线(即同 $S$ 只有一个公共点的直线)变成 $S'$的切线。这些问题如果不用中心射影来解，一般说来将是非常困难的。

39. (a) 试证明：三角形的顶点同它的内切圆与对边的切点的连线共点[参看图63(d)]。

(b) 设 $ABC$是一个三角形，$S$ 是一个圆，它同边 $AB$, $BC$, $CA$分别交于点$M$和$N$, $P$和$Q$, $R$和$T$。设 $C_1, A_1, B_1$ 分别是 $S$ 在点$M$和$N$, $P$和$Q$, $R$和$T$处的切线的交点。试证明直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 共点。

显然，问题39(a)是问题39(b)的一个极限情形。明确地说，当$M$和$N$, $P$和$Q$, $R$和$T$ 成对地重合时，39(b) 就变成 39

① 同上页末的注。

(a)。

40．设$ABCD$是圆$S$的一个外切四边形，而$A_1$，$B_1$，$C_1$，$D_1$是它的边同$S$的切点(图57)。试证明：

(a) 四边形$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$的对角线的交点重合。

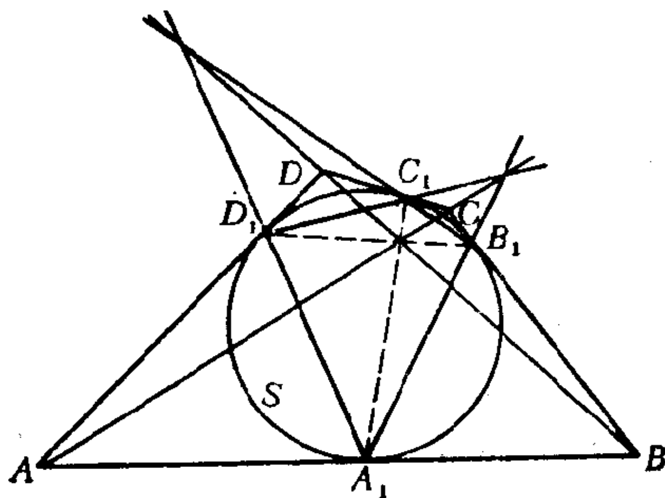



图 57

(b) 四边形 $ABCD$ 的对角线的延长线经过四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对边的交点。

41．设$ABCD$是圆$S$的一个内接四边形，而$P$和$Q$是它的对边的交点，$O$是它的对角线的交点。试证明：

(a) 存在无穷多个内接于$S$的三角形，它们的边(或其延长线)都分别经过$P$，$Q$，$O$(更确切地说，如果$S$的一个内接三角形的两边分别经过点$P$，$Q$，$O$中的两个点，则它的第三边必定经过第三个点)。

(b) 存在无穷多个内接于$S$的四边形，它们的对边的交点与$P$，$Q$重合(更确切地说，如果$S$的一个内接四边形的两条对边交于点$P$，而第三条边经过$Q$，则它的对边也经过$Q$)，并且所有这种四边形的对角线的交点与$O$重合。

(c) 存在无穷多个内接于$S$的四边形，它们的对角线的交点与$O$点重合，一对对边的交点与$P$重合(更确切地说，如果内接于$S$的一个四边形的对角线的交点与$O$重合，并且一条边经过$P$点，则它的对边也经过$P$点)，另一对对边的

交点与$Q$重合。

42. 设$S$是一个圆，$P$是$S$所在平面上的一点。考虑$S$的经过$P$的全部割线，这些割线中的每一条确定$S$的一对点。对于每一对这样的点，$S$在这对点处的切线有一个交点。试求这些交点的轨迹。

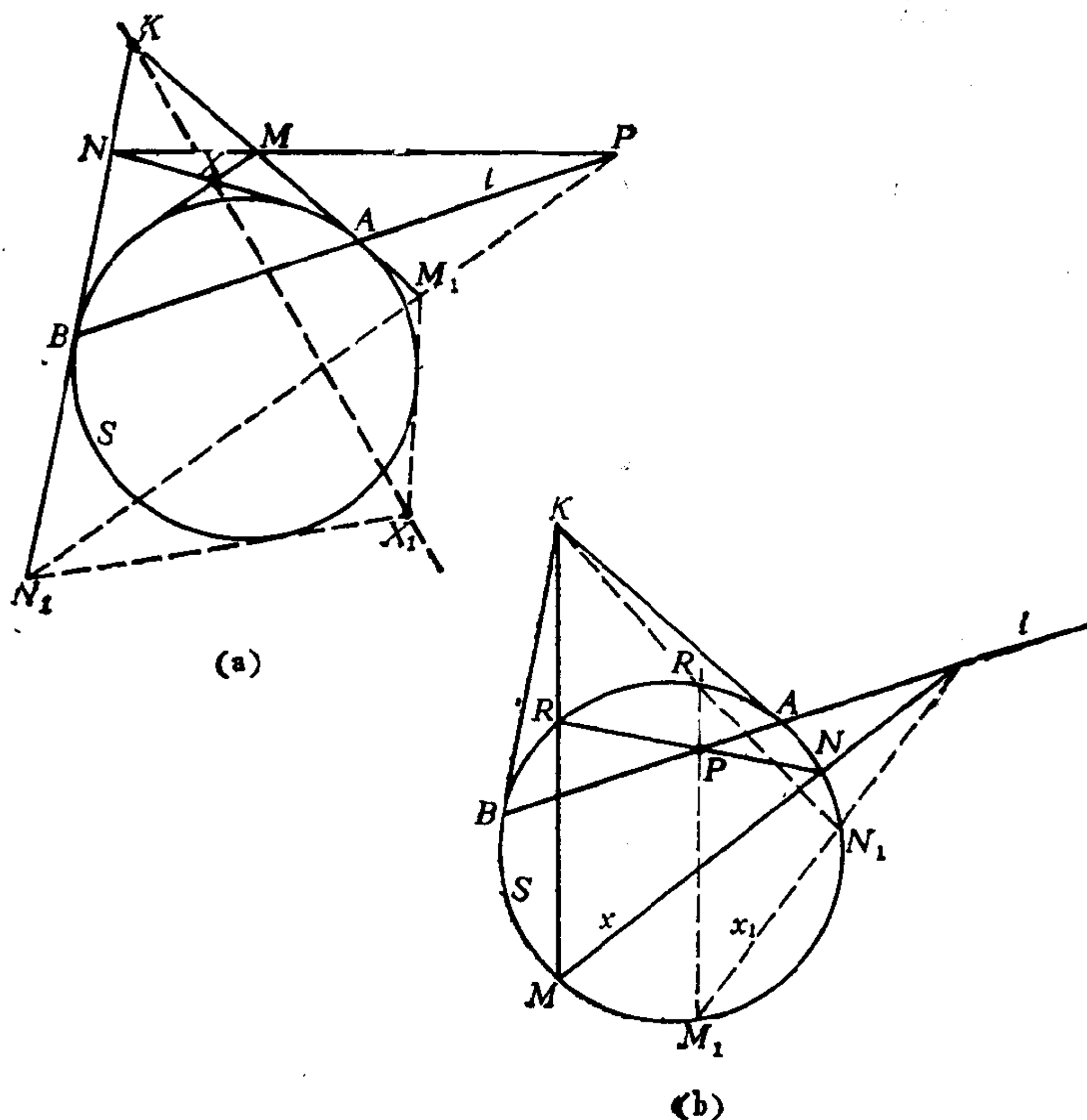



图 58

43. 设$S$是一个圆，$P$是一个点，$l$是经过$P$的直线，交$S$于点$A$和$B$，以$K$表示$S$在$A$和$B$处的切线的交点，

(a) 过 $P$ 的动直线交 $AK$ 和 $BK$ 于点 $M$ 和 $N$ [图58(a)]。试证明：从点 $M$ 和 $N$ 到圆 $S$ 的另一条切线的交点 $X$ 的轨迹，是经过 $K$ 的一条直线(更确切地说，是该直线在 $S$ 外的部分)。

(b) 从圆 $S$ 上的动点 $R$ 到点 $P$ 和 $K$ 分别作连线[图58(b)]。试证明：直线 $RK$ 和 $RP$ 分别同 $S$ 的第二个交点 $M$ 和 $N$ 的连线 $x$，经过直线 $l$ 上的一个定点(与 $R$ 的选取无关！)

44. 在一个给定的圆中试内接一个四边形，已知：

(a) 它的对角线的交点 $M$ 和对边上的两个点 $K$，$L$。

(b) 两条对边的交点和其余的两条边上的各一个点。

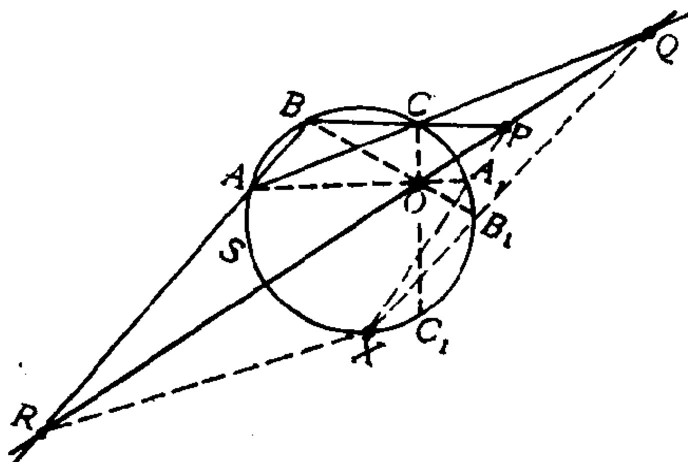



图 59

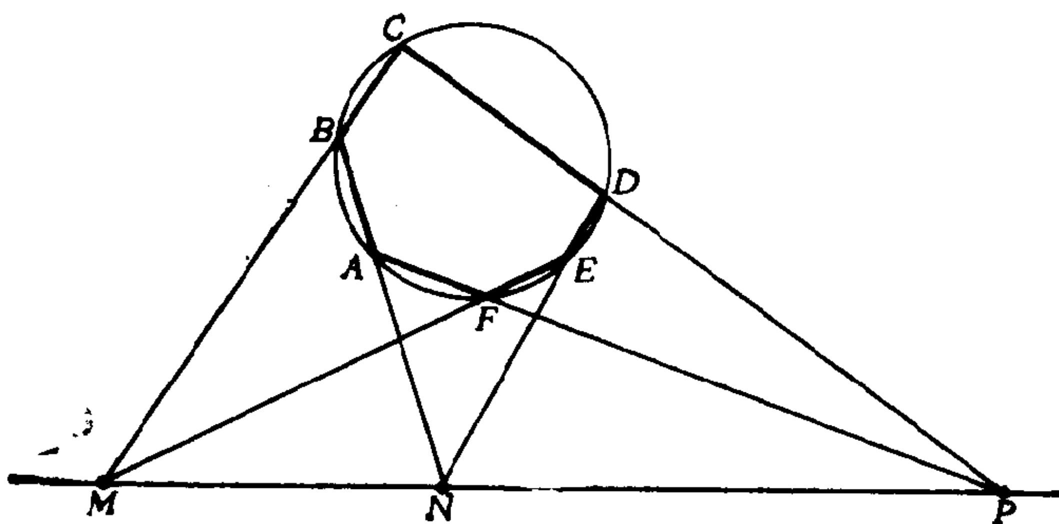



图 60

45. 设$AA_1, BB_1, CC_1$是圆$S$的交于一点$O$的三条弦，$X$是$S$上的任意一点。试证明：$\triangle ABC$的边$BC, CA, AB$分别同直线$XA_1, XB_1, XC_1$的交点$P, Q, R$在经过$O$点的一条直线上(图59)。

46. 巴斯卡(Pascal)定理。试证明圆内接六边形的三对对边的交点共线(图60)。

在§5中(参看问题80)还要再一次(以稍微更一般的形式)陈述巴斯卡定理。

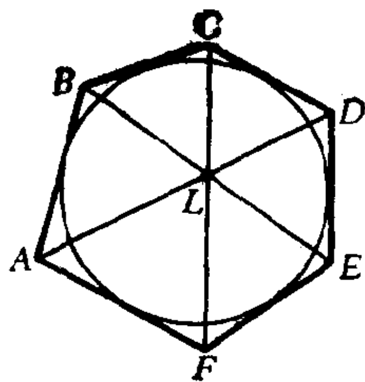


图 61

47. 勃良松(Brianchon)定理。试证明连结圆的外切六边形的对顶点的三条对角线共点(图61)。

在第二章§5的问题282①中，勃良松定理将以另一种关系出现。勃良松定理的一个颇使人感到惊奇的证明可以在附录中找到(参看第149页问题98)。关于勃良松定理和巴斯卡定理之间的联系看§4中的问题63。

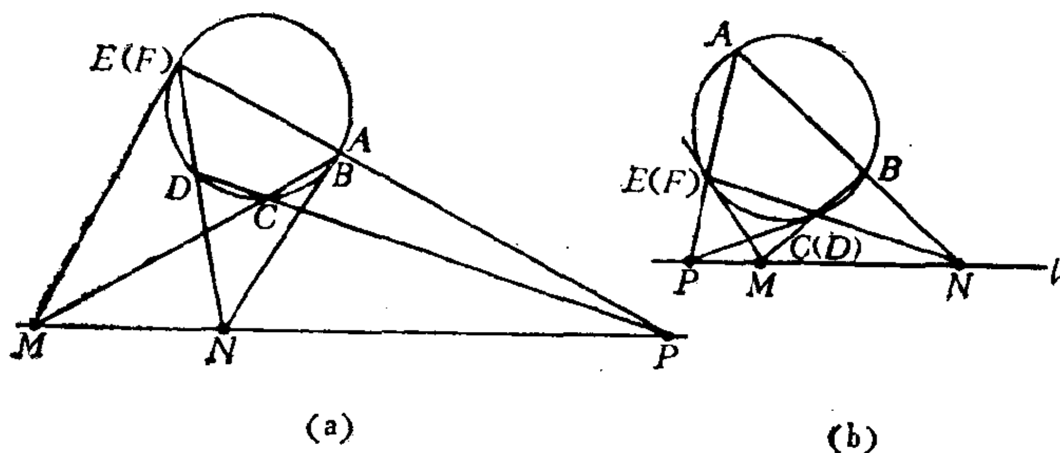


图 62

① 参看《几何变换》第四册。——英译者

关于外切或内接五边形、四边形和三角形的某些结果是勃良松定理和巴斯卡定理的极限情形。例如，假如六边形 $ABCDEF$ 的顶点 $F$ 在圆上移动并趋向于点 $E$，则边 $EF$ 趋向于圆在 $E$ 的切线，在这种极限情况下我们得到下列结果：内接于圆的五边形 $ABCDE$ 的边 $BC$ 同圆在 $E$ 点的切线的交点，与边 $AB$ 和 $DE$ 的交点及 $CD$ 和 $AE$ 的交点共线[图62(a)]。类似地，假如在六边形 $ABCDEF$ 中顶点 $F$ 同 $E$ 重合、$D$ 同 $C$ 重合，则相应地有：圆内接四边形 $ABCE$ 的边 $AB$ 和 $CE$ 的交点，与 $BC$ 和圆在 $E$ 的切线的交点，以及 $AE$ 和圆在 $C$ 点的切线的交点共线[图62(b)]。在六边形中，如果我们假定顶点 $F$ 和 $E$ 重合、$C$ 和 $D$ 重合，则容易看到：圆在一个内接四边形 $ABDE$ 的顶点 $E$ 和 $B$ 处的切线的交点同两对对边的交点在一条直线上；显然，圆在点 $A$ 和 $D$ 处的切线的交点也在那条直线上[图62(c)]。最后，假定六边形的顶点 $A$ 和 $B$ 重合、$C$ 和 $D$ 重合、$E$ 和 $F$ 重合，则可推出：三角形 $ACE$ 的边同它的外接圆在对顶点处的切线的交点共线[图 62(d)]。我们不妨认为所有这些命题都可以看成是巴斯卡定理的特殊情形，只

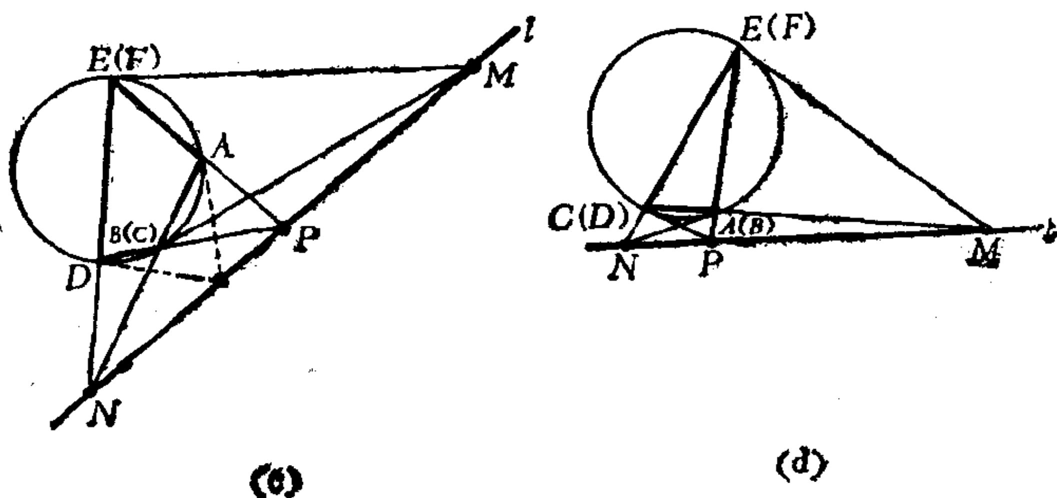



图 62

要其中有一条或几条边的长度等于0，并且它们都可以用证明巴斯卡定理的方法进行证明(而且在某些情况下证明可以大大简化)。

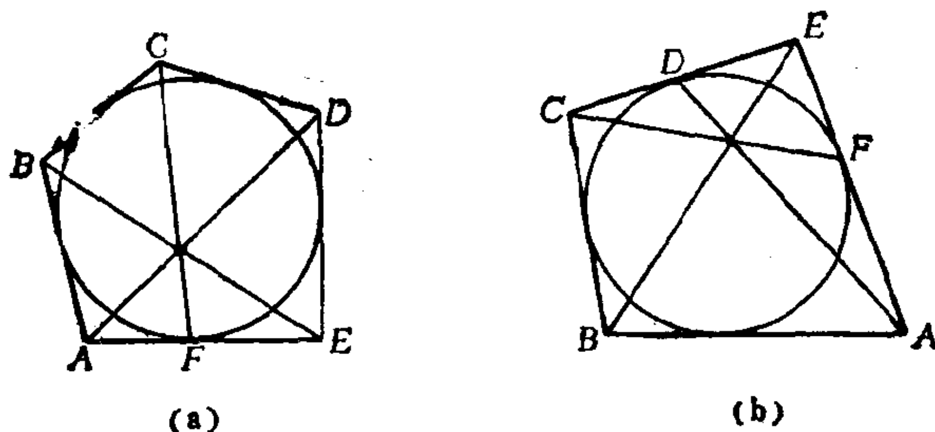



图 63

用几乎同样的方法，从勃良松定理可以推出一些新的命题。为此，我们只要假定外切六边形有一个或几个角等于180°。这几个结果提示在图63(a)—(d)中，它们的陈述留给读者(注意，在图63(c)，63(d)中所表示的定理和问题40(a)和39(a)中的定理相同。)

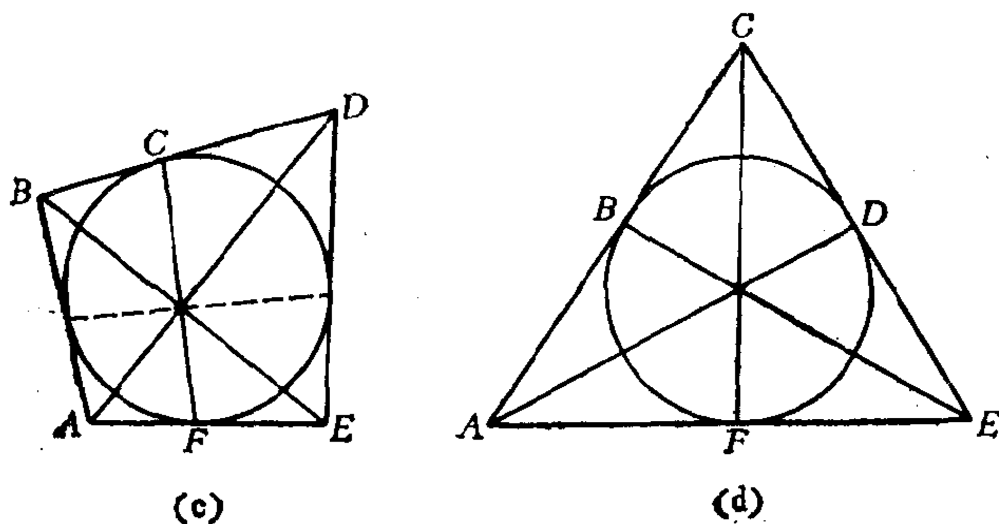



图 63

48. 设$A$是圆上一点.试只用直尺作圆在$A$点的切线.

可以把问题48同下节中的问题54作比较。

49. 设$MN$是圆$S$的弧，$l$是和这弧交于一点的直线(图64)。试只用直尺找出$l$同$S$的另一个交点。

可以把问题49同下节中的问题55作比较。

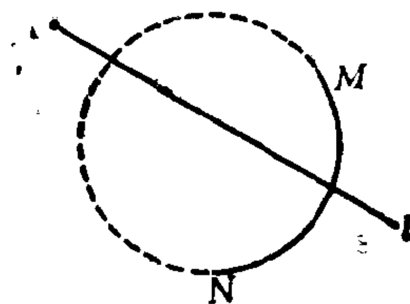



图 64

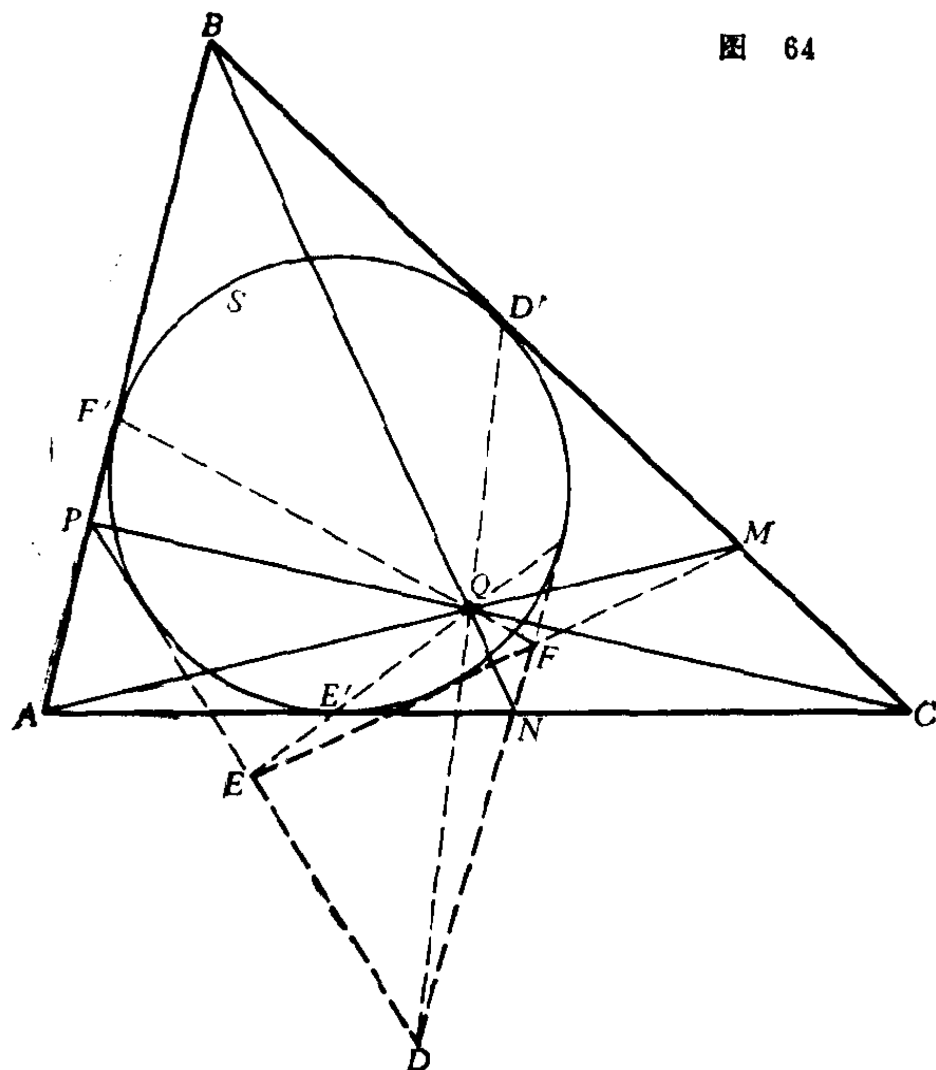



图 65

50. 给定三角形$ABC$和一个点$Q$。设$M, N, P$分别是直线$AQ, BQ, CQ$同边$BC, CA, AB$的交点(图65)。又设$S$是$\triangle ABC$的内切圆，同它的边切于点$D', E', F'$，从$M, N, P$到$S$的另一条切线构成的三角形为$DEF$①，试证明：直线$DD', EE', FF'$交于点$Q$。

① 其中$EF, FD, DE$分别在经过$M, N, P$的切线上。

## 4. 平面上的配极·对偶原理

下面的定理在以后将起重要的作用。

**定理 1** 设 $P$ 是不在圆 $S$ 上的一个点，经过 $P$ 作所有可能的成对的割线，它们同 $S$ 的交点以 $A$ 和 $A_1$，$B$ 和 $B_1$ 表示。则所有直线 $AB$ 和 $A_1B_1$ 的交点，以及直线 $AB_1$ 和 $A_1B$ 的交点全都在一条直线 $p$ 上(图66)。

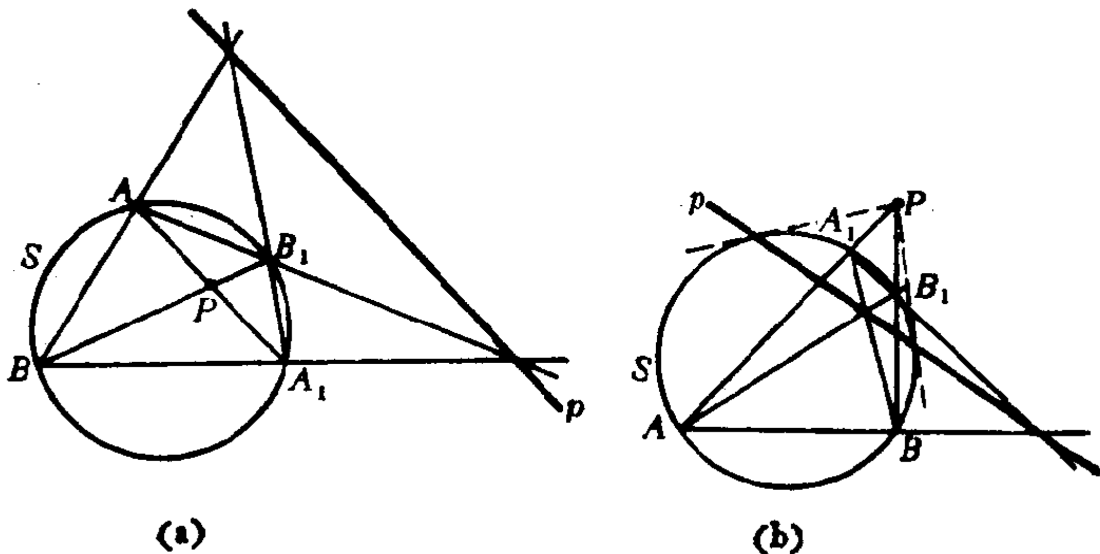



图 66

直线 $p$ 称为点 $P$ 关于圆 $S$ 的极线，而 $P$ 称为 $p$ 的极点①。

初看起来，定理 1 可能显得并不特别有趣。然而，它寓

---

① 点 $P$ 关于圆 $S$ 的极线也可以定义成如下的点的轨迹：这种点在经过 $P$ 点的割线上，并同 $P$ 一起调和地分开由 $S$ 在该直线上所截下的线段（参看第45,46页中的两段）。

于简单形式中的惊人的不平凡性将充分证明我们对它的重视是有道理的。

前一节的定理 1 和1′使得我们可以给出定理 1 的一个平易的证明。实际上，如果点 $P$ 在圆 $S$ 的内部[图66(a)]，则用适当的中心射影可以把 $S$ 变成圆 $S'$，而 $P$ 则变成 $S'$ 的中心（参看 § 3 定理 1 ）。当 $P$ 是 $S$ 的中心时定理 1 是显然的；事实上，在这时四边形 $ABA_1B_1$ 是一个矩形（它的各个角都对着直径），$AB \parallel B_1A_1$，$AB_1 \parallel BA_1$，因此所要找的轨迹是平面的无穷远直线[图67(a)]。由此可见，我们的定理对 $S$ 内部的任何点 $P$ 都成立。如果 $P$ 在 $S$ 外面[图 66(b)]，则用一个适当的中心射影可将经过 $P$ 点而且不与 $S$ 相交的一条直线变成无穷远直线（参看 § 3 定理 1′），从而 $P$ 变成无穷远点。然而，如果 $P$ 是一个无穷远点，则定理 1 是显然的；事实上，这时四边形 $AA_1B_1B$ 是一个内接于圆的梯形（即一个等腰梯形），底具有固定的方向[图67(b)]，并且它的边 $AB$ 和 $A_1B_1$ 的交点，以及它的对角线 $A_1B$ 和 $AB_1$ 的交点都在它的对称轴上，即在 $S$ 的垂直于梯形的底的一条直径上。这说明定理 1 对于 $P$ 在 $S$ 外的情形也成立。

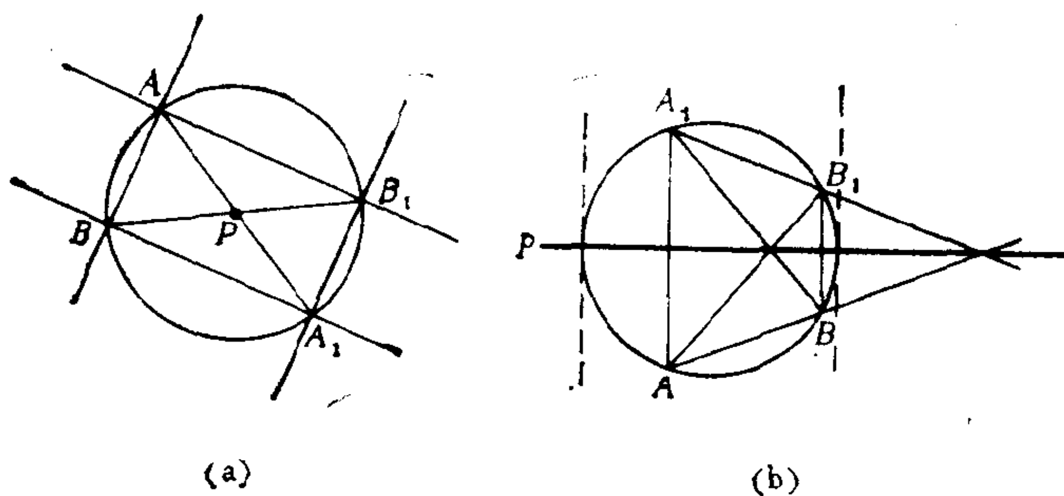



图 67

如果$P$在$S$上，则定理1中的轨迹没有意义，因为这时点$A$和$B$与$P$重合，四边形$ABB_1A_1$退化成三角形$A_1B_1P$，直线$A_1B$和$AB_1$交于$P$，而直线$AB$则不确定(图68)。然而，容易看到，如果不在$S$上的点$P'$无限趋向于$P$，则$P'$的极线$p'$趋向于$S$在$P$点的切线(参看图68)。所以我们自然可以把$S$上一点$P$的(相对于$S$的)极线定义为$S$在$P$点的切线$p$。

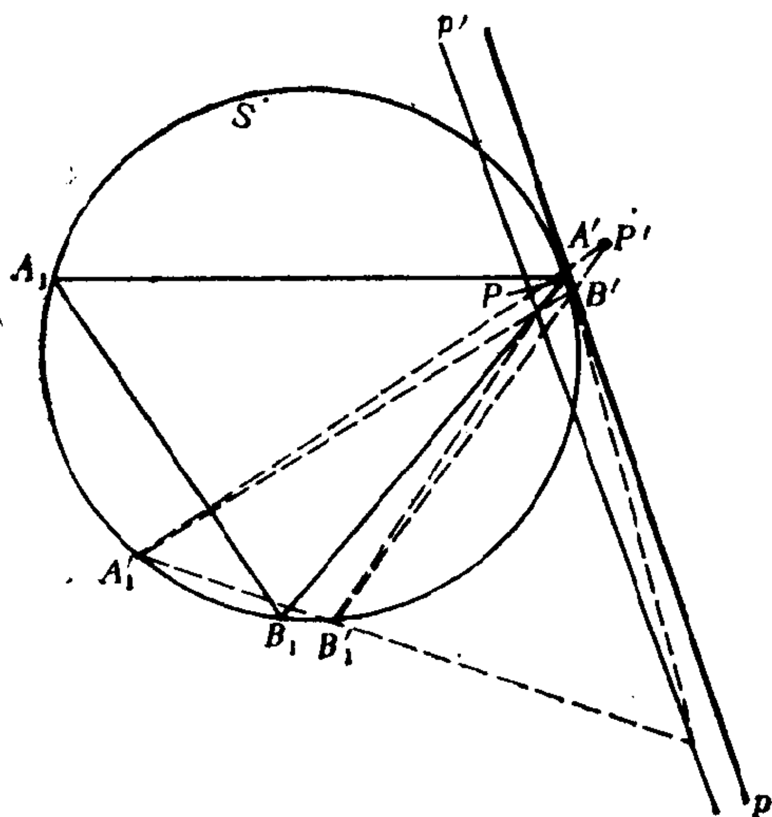



图 68

如果$P$在$S$内部，则它相对于$S$的极线整个地在$S$的外部；如果$P$在$S$的外部，则它的极线$p$和$S$相交(参看图66)。不难证明，如果点$P$在圆$S$的外部，则它的极线$p$是从$P$到$S$的两条切线上的切点的连线[图66(b)]。为了证明这一点，可以注意这个论断当$P$是无穷远点时成立[参看图67(b)]；又因为把$P$变成$P'$、把$S$变成圆$S'$的中心射影，

同时也把$P$关于$S$的极线变成$P'$关于$S'$的极线，并且把$S$的切线变成$S'$的切线，从而可以推知所要的结论成立。

注意，点$P$关于圆$S$的极线$p$垂直于$S$的经过$P$点的直径。反之，直线$p$的极点$P$在从$S$的中心$O$到$p$的垂线上。只要利用对称性就不难得到这个结论(图69)。

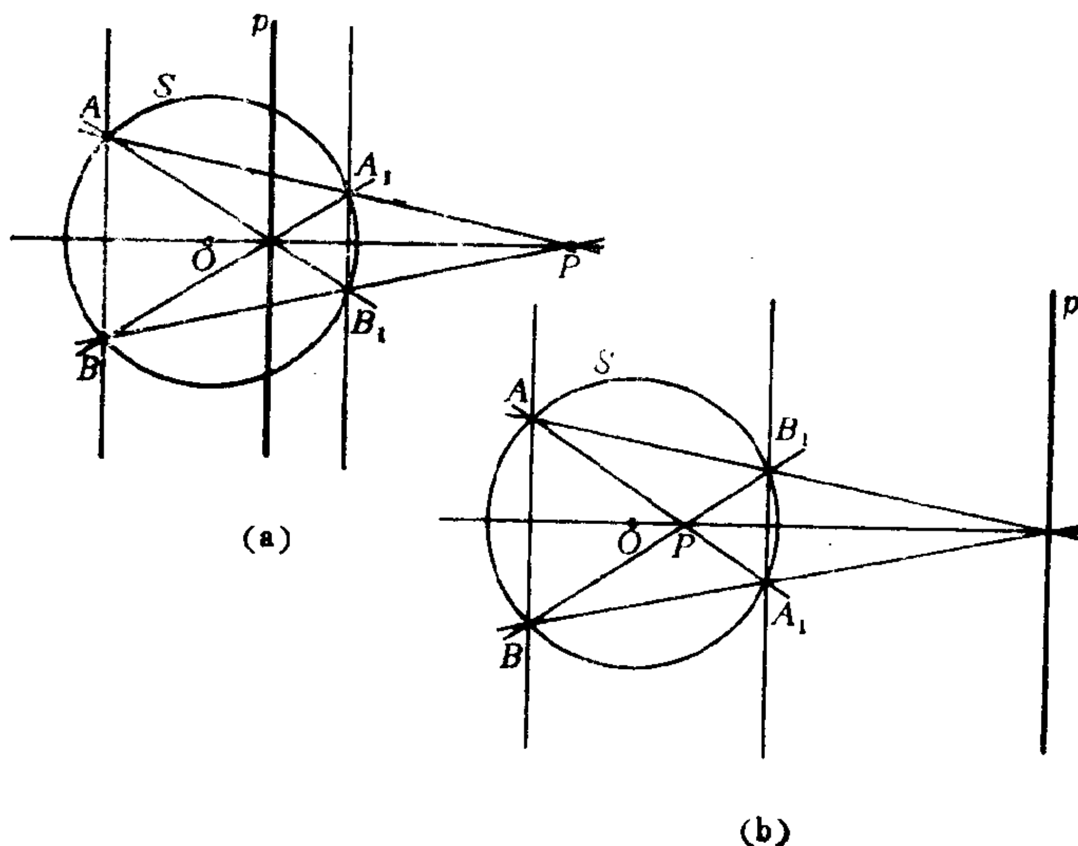



图 69

关于给定的圆$S$，一个点$P$的极线的作图方法，以及任意一条直线$p$的极点的作图方法，蕴含在这些概念的定义中(参看图66(a),(b))。这两个作图都只要用到直尺，这一点我们以后要用到。

关于极线最重要的结果是：

**定理2** 如果$A$点在$B$点的极线$b$上，则$B$点在$A$点的极线$a$上(图70)。

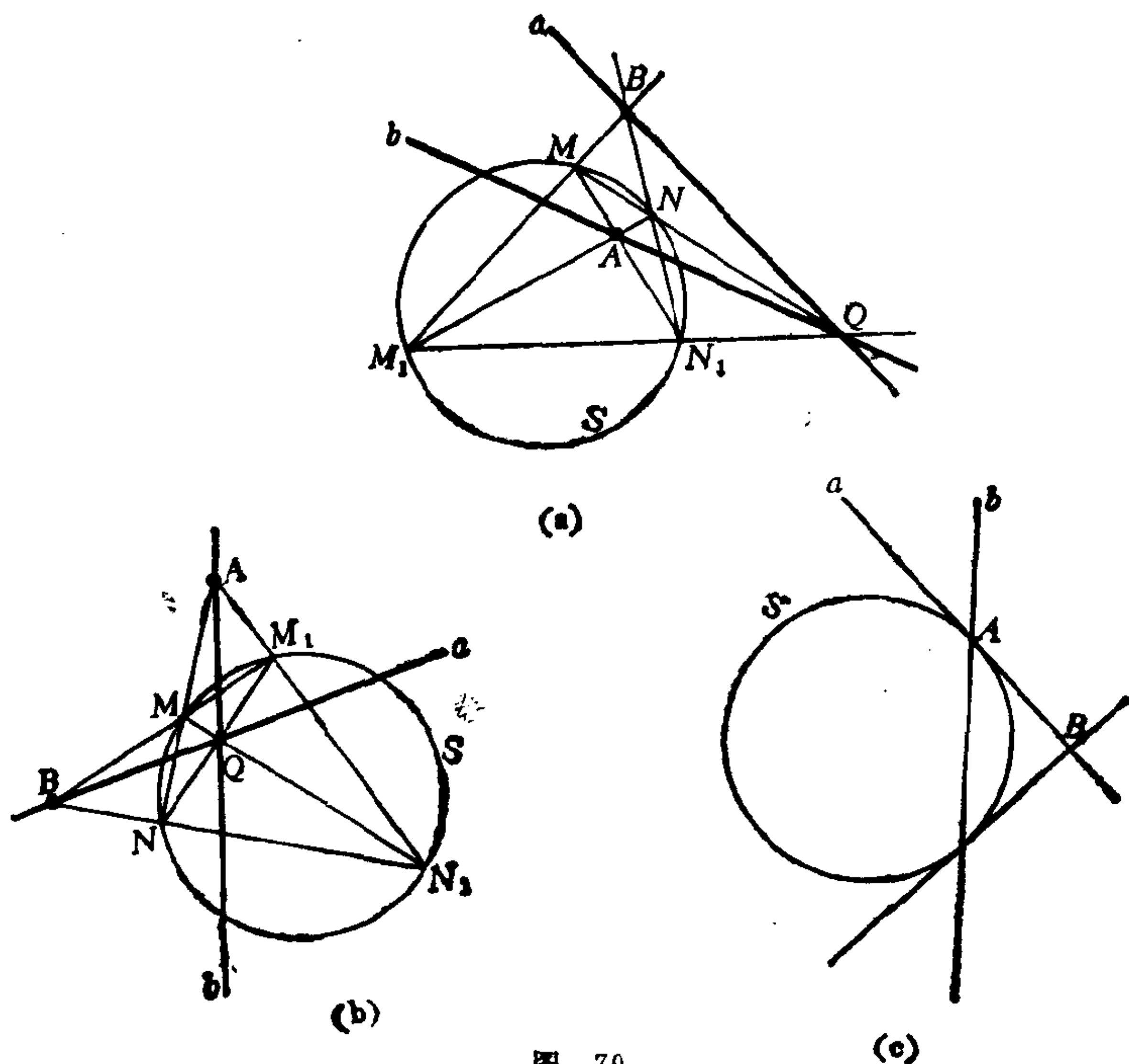



图 70

这个性质是定义的一个直接推论。因为如果$A$是圆$S$内部的一点，则$B$必在$S$的外部[图70(a)]，要不然$B$的极线$b$将整个在$S$的外面，从而与$S$内部的点$A$落在$b$上这一事实相矛盾。由于$A$在$B$的极线上，因而经过$B$有两条割线分别交$S$于点$M, M_1$和$N, N_1$，使得$A$是四边形$MM_1N_1N$的对角线的交点。所以反过来从$A$点看，它的极线就是$BQ$，其中$Q$是$MN$和$M_1N_1$的交点，这就证明了$A$的极线经过$B$点。如果$A$在$S$外面，定理2可用类似的推理证明(这时$B$可能在$S$的内部，如图70(a)，我们只需在其中交换$A$和$B$的位置即可，或者象图70(b)那样在$S$的外部)。如果$A$是$S$上的

一点，则定理 2 的证明可以从图70(c)看出来。

51．试证明：如果从半径为 1 的圆 $S$ 的中心 $O$ 到一点 $A$ 的距离是 $d$ ，则从 $O$ 到 $A$ 关于 $S$ 的极线 $a$ 的距离等于 $1/d$。

52．设 $A$ 和 $B$ 是两个点， $a$ 和 $b$ 是它们关于中心在 $O$ 点的圆的极线，$AP$ 和 $BQ$ 分别是从 $A$ 到 $b$ 和从 $B$ 到 $a$ 的距离。试证明

$$\frac{OA}{AP}=\frac{OB}{BQ}.$$

53．(a) 设 $ABCD$ 是圆 $S$ 的内接四边形．试证明：从 $S$ 的中心到四边形对边交点的连线的垂线经过它的对角线的交点。

(b) 在 $ABCD$ 是圆 $S$ 的外切四边形的假定下证明上述命题。

54．设 $A$ 是圆 $S$ 外一点．试只用直尺作出从 $A$ 到 $S$ 的切线。

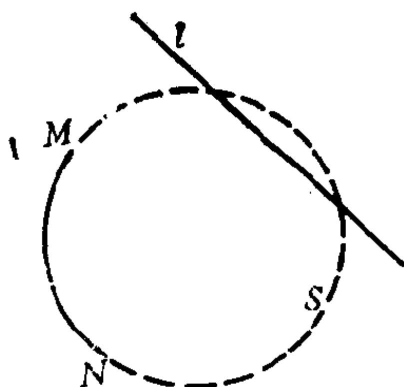


图 71

可以把这个问题同 § 3 的问题48作比较。

55．设 $MN$ 是圆 $S$ 的一段给定的弧， $l$ 是不与这弧相交的给定的直线(图71)。试只用直尺作出 $l$ 同 $S$ 的交点。

可以把这个问题同 § 3 的问题49作比较。

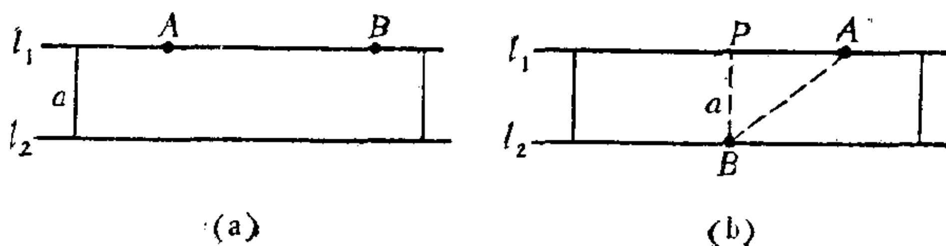


图 72

56. 有两条平行边的直尺称为一个平行直尺。这种直尺可以用来画相距等于直尺宽度 $a$ 的两条平行线 $l_1$和 $l_2$，并且使得$l_1$经过给定的两点$A$和$B$[图72(a)]，或者使得 $l_1$经过$A$而$l_2$经过$B$[图72(b)]①。

试证明：只用一个宽度为 $a$ 的平行直尺，可以找出给定直线 $l$ 同已知中心为$A$，半径为 $a$ 的圆的交点(即使这个圆没有画出来)。

平行直尺是非常普通的作图工具。要确定什么样的作图问题可以单用这样的直尺来解是一个很有趣的问题。显然，只用直尺可以实现的作图用平行直尺也可以作出来，但是反过来不对。例如，我们将在§5中看到，单用直尺不能作出经过给定点$M$且与给定直线 $l$ 平行的直线(参看第125页)；而这时只用平行直尺显然可以解决这种类型的某些作图问题(参看§1问题3(b))。

容易看到，用平行直尺可以作出来的图都能够用直尺和圆规作出来(因为我们可以用这些工具解决表示在图72(a)，(b)中的两个作图问题；在图72(b)中 $l_1$和 $l_2$的作图可以归结为给定了直角三角形$ABP$的斜边 $AB$和边 $BP=a$，要作出它的顶点$P$)。反过来，在§5中我们将证明，能用直尺和圆规作出来的图，也能够只用平行直尺作出来；在这方面问题56中的作图将是基本的。

57. 试证明：连结三角形$ABC$的顶点同这三角形的对边关于某圆$S$的极点$A'$，$B'$，$C'$的直线共点。

---

① 显然，后者只有当$AB \geq a$时才可能。

这个问题中的定理可以重述如下。说两个三角形$ABC$和$A'B'C'$关于给定的圆是配极的，如果$\triangle A'B'C'$的边是$\triangle ABC$的对应顶点的极线。定理2说明，$\triangle ABC$的边也就是$\triangle A'B'C'$的对应顶点的极线。从而问题57中的定理断定：*配极的三角形总是透视的*（参看§2问题22和它后面的注释）。由此可以推出三角形$ABC$和$A'B'C'$的对应边的交点共线（参看问题22）。（在§3的问题39(a)，(b)中的结论是问题57中的定理的特殊情形。）

58．设给定了两个三角形$ABC$，$A_1B_1C_1$和一个圆$S$。试证明：如果这两个三角形的对应顶点的连线共点，则$\triangle ABC$的边关于圆$S$的极点和$\triangle A_1B_1C_1$的对应边关于$S$的极点的连线也共点。（换句话说，如果两个三角形透视，则和它们配极的两个三角形也透视；参看问题57后面的注释。）

59．称一个三角形关于给定的圆是*自配极的*，如果它的每一条边是对顶点的极线。试证明：对于一个钝角三角形$ABC$，存在唯一的圆，使得$\triangle ABC$对于它是自配极的；而且这个圆的中心就是$\triangle ABC$的高线的交点。直角三角形和锐角三角形关于任何圆都不是自配极的。

我们注意，从定理1可以推出：如果在圆$S$中内接一个四边形，则以四边形的对角线的交点和两对对边交点为顶点的三角形关于$S$是自配极的[图73(a)]。类似地，如果作圆$S$的一个外切四边形，则以四边形的对角线和对边交点的连线为边的三角形关于$S$是自配极的[图73(b)]。

（如果在图73(b)中的外切四边形的边是$S$在图73(a)中所示的内接四边形的顶点处的切线，则图73(b)中的$\triangle PQR$与图73(a)中的$\triangle PQR$重合；请读者自己证明这个结论。）从

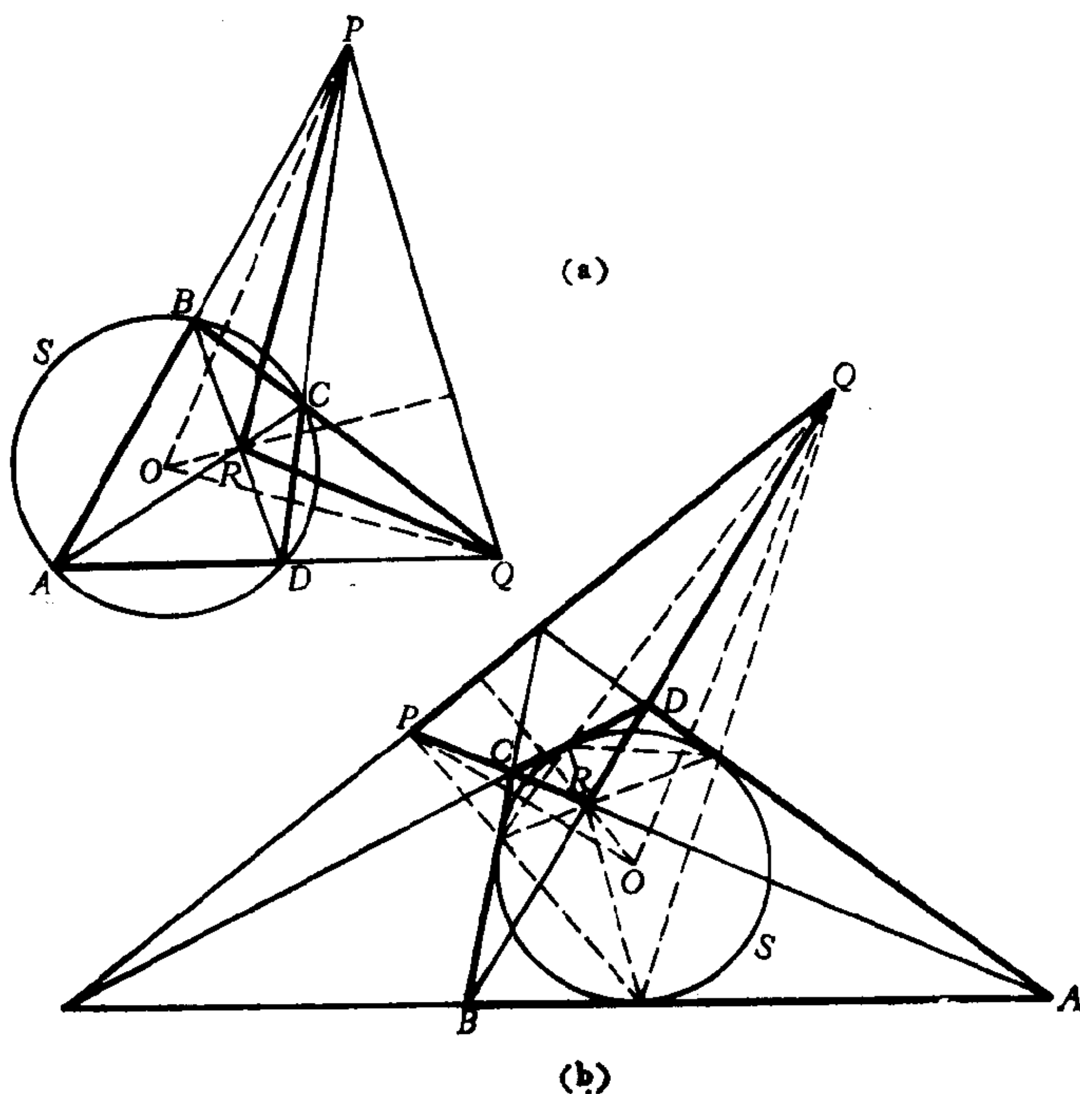



图 73

问题59中的结果可以推出，上面提到的两个三角形都是钝角三角形，并且它们的高线的交点与$S$的中心重合。

利用一个点关于圆的极线的概念，我们可以定义平面的一类变换，这种变换在证明许多定理时是有用的。设$F$是由点和直线组成的平面图形，$S$是一个定圆。把$F$的每一个点换成它关于$S$的极线，$F$的每一条直线换成它关于$S$的极点，这些极线和极点组成一个和图形$F$相对应的图形$F'$。用上述方法把$F$变成确定的图形$F'$的变换，称为关于$S$的配

极 (polarity)[1]. 有时我们也用配极变换这个词。

当然，在我们至今所用的变换这个词的意义下，也就是说在将点变成点的映射（点变换）的意义下，配极不是一个变换；由定义，它是将点和线互换的一种映射。因此，配极不同于我们迄今所碰到的所有的变换（运动，相似变换，射影）。在下面（参看第二章§5)②，我们将会遇到其它不是点变换的变换的例子。

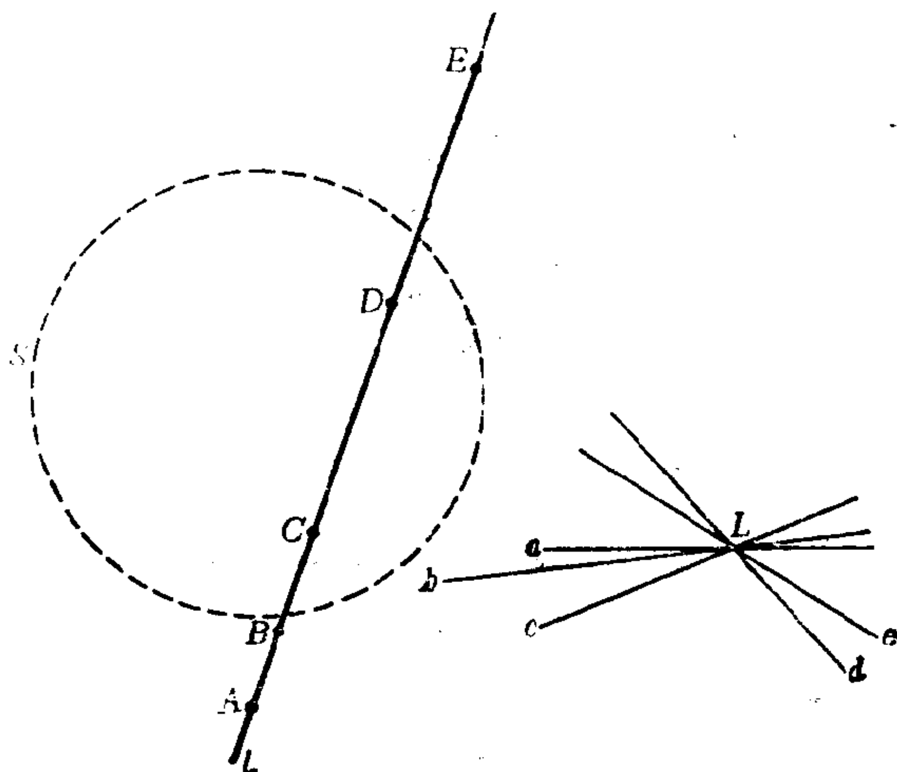



图 74(a)

就后面所列出的问题来说，上面定义配极的方式是完全可以满意的；此外，可以把配极看成平面到它自身的变换，更确切地说，作为平面的点和直线的集合的一种变换，它把

① 然而，"配极"常常表示一种更为一般的变换（看第94页），在那里，在它自己的极线上的那些点一般构成一条圆锥曲线，而不一定构成一个圆，或者根本没有这样的点。——英译者

② 参看《几何变换》第四册。——英译者

每一个点变成某一条直线，把每一条直线变成某一个点。并且，根据定理 2，在直线 $l$ 上的点变成经过 $l$ 的象点 $L$ 的直线[图74(a)]。配极把（看成点集合的）一条曲线 $\gamma$ 变成新的曲线 $\Gamma$，$\Gamma$ 可以设想为它的切线族的包络[图 74(b)]①。

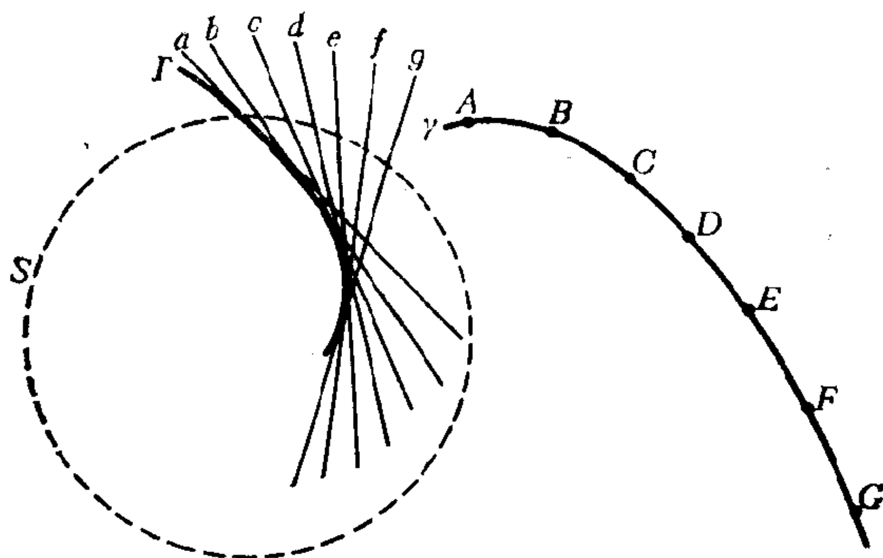



图 74(b)

① 这里有一个恰当而有趣的解释。显然，关于具有中心 $O$ 和半径 1 的圆 $S$ 的配极，中心在 $O$ 点，半径为 $r$ 的圆 $s$ 变成半径为 $1/r$ 的圆 $s'$，这里 $s$ 设想为它上面的点的集合，而 $s'$ 则作为 $s'$ 自己的切线的集合（与 $O$ 相距 $r$ 的点 $A$ 变成与 $O$ 相距 $1/r$ 的直线 $a$；参看问题51），或者反过来。现在假设圆 $s$（在这时把 $s$ 看成它的切线 $a$ 的集合是有益的）的中心 $B$ 与 $O$ 不重合（如前，$s$ 的半径是 $r$）。如果 $b$ 和 $A$ 是在关于 $S$ 的配极下 $B$ 和 $a$ 的象，则由问题52的结果，$OA/AP=OB/BQ(=OB/r)$，其中 $AP$ 和 $BQ=r$ 分别是从 $A$ 到 $b$ 和从 $B$ 到 $a$ 的距离。因此直线 $a$ 的集合（即圆 $s$）变成满足关系式

$$OA/AP=\text{常数}(=OB/r)$$

的点 $A$ 的集合（“轨迹”）$s'$，即变成到 $O$ 和 $b$ 的距离之比是常数（并且等于 $OB/r$）的点 $A$ 的轨迹。但是，大家知道，这个轨迹是一个椭圆（如 $OB/r<1$，即 $O$ 在 $s$ 内部），或抛物线（如 $OB/r=1$，即 $O$ 在 $s$ 上），或双曲线（如 $OB/r>1$，即 $O$ 在 $s$ 外部）。由此，配极将圆 $s$ 或者变成圆（这是当 $s$ 的中心和确定配极的圆 $S$ 的中心 $O$ 重合时的情形），或者变成椭圆，抛物线，或双曲线。（看《几何学的新探索》第六章。）从这个事实可以推出圆锥截线的许多有趣的性质。

注意，可以不借助于定理1而用下面的立体几何作图来定义平面到它自身的配极。设$\pi$和$\pi'$是平行平面，$M$是与这两个平面等距离的一个点(图75)。对于$\pi$上的每一个点$A$(除去从$M$到$\pi$的垂足$O$以外)，配以如下得到的直线$a$：过$A$和$M$作直线$l$，经过$M$作平面$\lambda$垂直于$l$，用$a'$表示$\lambda$和$\pi'$的交线，然后把$\pi'$"下降"到平面$\pi$上（即将$\pi'$垂直投影到$\pi$上），设$a'$这时变成$\pi$上的直线$a$。不难证明，将$A$变成跟它相配的直线$a$的变换是关于以$O$为中心，以$OM$为半径的圆的配极。我们沒有机会来运用这个结果，它的证明留给读者。从刚才给出的定义容易推出配极的所有性质；我们建议读者自己做做这些问题。

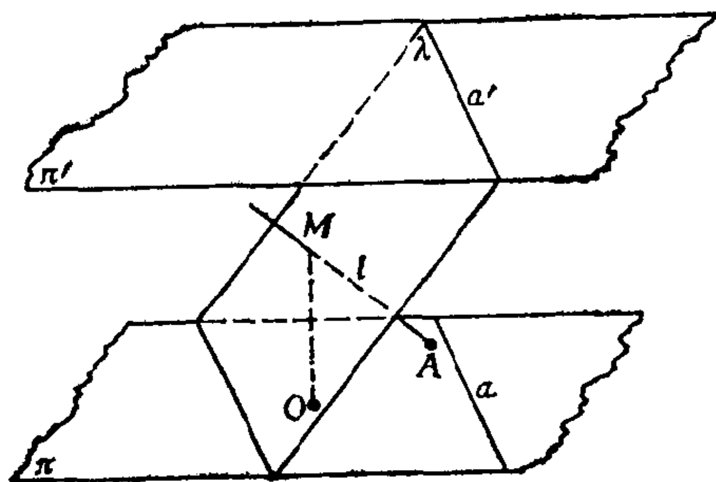



图 75

有时候利用配极可以把给定的一个问题归结为比较简单的问题（例如，下面的问题67和68）。更重要的是配极可以用来作为从已知的结果获得新的结果的一种手段。为阐明这一点，注意在用中心射影或平行射影解决前几节中的问题时，我们的想法是把给定的问题归结为这同一个问题的简单

的特殊情形(例如，在§1中用等边三角形代替任意三角形，而在§2和§3中用一对平行线代替一对任意直线）。在用配极时，一般地说，我们不是把给定的问题化成它的一种特殊情形；事实上，配极把一个图形变成另一个与它完全不同的图形，点换成了直线，而直线换成了点。因此，如果我们对伴随某一个命题的图形使用配极，将得到对应于一个新的命题的图形。这个新的命题可能比原来的要简单；通过证明它，我们也就证明了原来的命题。如果这个新命题并不比原来的简单，对我们仍然是有好处的，因为证明了其中的一个，另一个也就自动成立。

从一个定理用配极变换所得到的另一个定理，称为原定理的**对偶定理**，而彼此对偶的成对的定理的存在性，就是众所周知的**对偶原理**，在后面我们将用许多例子来阐述它。

以平面的配极概念为基础的对偶原理，使得我们可以从给定的一个定理通过术语“点”和“直线”的互换得到一个新的定理。在定义配极时，我们用到了本节开头的定理1。它的意义并不仅仅在于使得我们能够对每一个点配以一条确定的直线、和对每一条直线配以一个确定的点——这种对应是十分普通的（例如，对于一个点$P$，我们可以用由$P$和某个定点$O$的连线的垂直平分线和它相对应；而$O$对应的是，譬如说，无穷远直线；而无穷远点则和经过$O$点垂直于该无穷远点所确定的方向的直线相对应）——而在于它使得我们给直线$l$上的一点所配的直线是经过与$l$相对应的点的一条直线（参看定理2）。可以证明，刚才所说的后一种对应（使得一个点（一条直线）对应于唯一的一条直线（一个点），并且使得一个点和经过它的一条直线，对应的是一条直线和在它上面的一个点的那种对应），都能够用关于某一

个圆的配极，以及（如果还需要的话）平面到它自身的一个中心射影，或者中心对称加一个中心射影来实现①。

再说明一点。我们可能已经给读者以这样的印象，那就是配极基本上是从已有的定理获得新定理的一种方法，而中心射影和平行射影则仅仅是用来作为证明几何命题的一种技巧。这种看法不是完全正确的；因为正如我们在上面提到的，配极有时可以用来证明给定的几何命题，并且就象我们将要说明的，中心射影和平行射影偶而也用来从已知的定理推出新的定理：通过对一个定理的图形作中心射影或平行射影，有时候可以得到一个新的定理。考虑一个定理，如果它仅仅包含在平行射影下保持的那些概念（即是仿射几何的一个定理；参看本书的引论），那么显然，对这种定理作平行射影，不能给出一个新的定理（正如用运动作用在任何定理的图形上总不会导致一个新的定理一样；关于这个问题的更加详细的讨论，可以参看《几何变换》第一册的引论），但是有可能导致这个定理的一种简单的特殊情形；在§1中已经给出这种类型的许多恰当的例子。然而，对于包含不是仿射概念的定理中的图形，作平行射影有可能给出一个新的定理；例如，利用射影把直角三角形变成等边三角形，我们就能从关于直角三角形的定理得到新的定理。类似地，对仿射性的定理用中心射影可以导致新的定理；在前面已经给出恰当的例子（参看§1中的问题29,31,32(a),33）。总之，比较稳妥的说法是：中心射影和平行射影更经常地是用来证明定理，而配极则更常用来从已知的定理获得新的定理。

重要的是要注意，对偶原理仅仅在射影平面，即补充了

---

① 关于这方面可参考H.S.M. Coxeter的Projective Geometry (Blaisdell Publishing Co., New York, 1964)，第八章。

“无穷远元素”的平面上成立（关于圆$S$的配极，将$S$的中心变成无穷远直线，而它的直径则变成无穷远点）。这是因为对偶原理使得我们可以互换几何命题中的点和直线，这意味着点和直线在某种意义下是对等的。而在引进无穷远元素以前，点和直线决不是对等的，因为如果对等，则从平行直线（没有公共点的直线）的存在就该推出“平行”点（“没有公共直线”的点，即没有同时经过它们的直线的点）的存在，但是这样的点是不存在的。无穷远元素的引进消除了平行直线的特殊地位；在射影平面上，任意两条直线都有唯一的公共点（通常的点或无穷远点），而任意两个点也总是确定唯一的经过它们的直线（参看第一章，§2第46页及其后诸页）。

可以证明：从上面提到的射影平面的点和直线的基本性质的对称性，能够推出对偶原理，即从给定的一个定理通过互换术语“点”和“直线”以及“在上”和“经过”，可以得到一个新的定理（它的对偶）。实际上，在证明任何几何定理时，我们总是把它归结成一个比较简单的定理，然后再归结成一个更加简单的定理，如此下去，直至达到最简单的几何命题，即所谓公理（公认的无需证明的假设）。现在，在射影平面上的点和直线的基本性质是完全对等的，这就是说，在任何给定的公理中，如果我们互换“点”和“直线”以及“在上”和“经过”，可以得到一个正确的命题。不妨把这些命题也列为公理。虽然这样所得到的公理系统会显得累赘，但它是自对偶的。而另一方面，任何（正确的）定理的对偶，必然是一个新的也是正确的定理，它可以用跟原定理的证明过程大致相同的形式来证明，唯一的差别只是这时的证明过程追溯到的有关的公理与原定理追溯到的公理是

互相对偶的[1]。

还要说明一点。就获得对偶定理这一点来说，利用配极可以比利用点和直线的基本性质的对等性得到多得多的对偶定理。因为一方面，这种对等性（来源于存在成对对偶的公理）的运用，仅限于不涉及角度或距离的那些定理（由于我们沒有这些概念的对偶）[2]。另一方面，在下面第102页上给出的配极的性质B和C，使得我们能够对更大一类定理应用对偶原理。

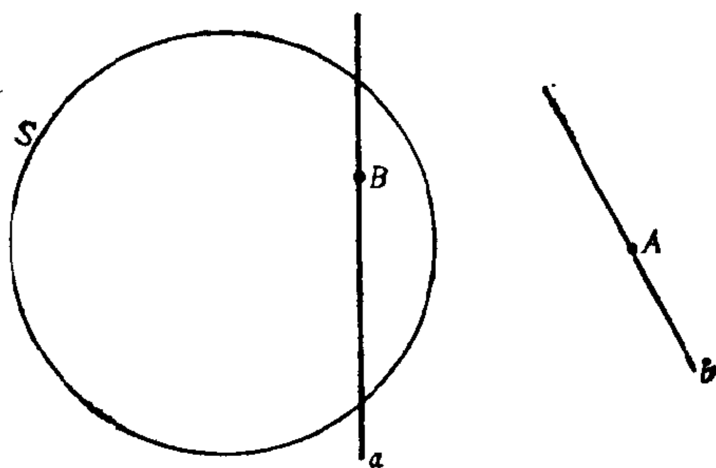



图 76

下面我们来考虑配极的某些性质，其中最重要的是：

A. *配极把点$A$和经过$A$的直线$b$分别变成直线$a$和在$a$上的点$B$*(图76)。

配极的这个性质是定理2的直接推论。

从性质A可以推出：配极把在一直线$l$上的三个点$A$, $B$, $C$变成经过一点$L$的三条直线$a$, $b$, $c$(图77；也可参看图74

---

① 详细情形可参看H.S.M. Coxeter的Projective Geometry 的第三章。

② 换句话说，射影平面中点和直线的基本性质的等价性，只允许我们对射影几何的定理（参看本书引论）应用对偶原理。

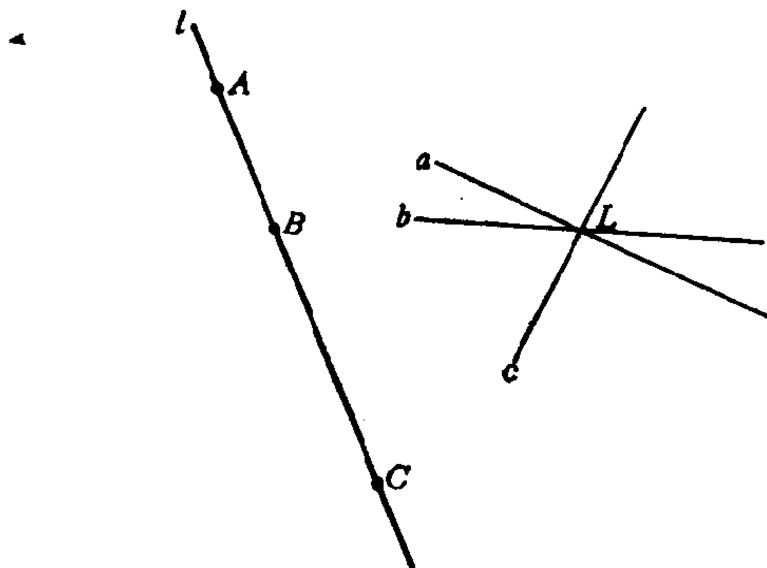



图 77

(a))。反过来，它把三条共点的直线（经过同一个普通的点或无穷远点）变成三个共线的点。仅仅用这个事实就使得我们可以从给定的定理获得新的定理。例如，考虑问题38(a)中的定理：假设 $A_1,B_1,C_1$ 是三角形 $ABC$（为简单起见，称为$\triangle T$）的边上的点，它们使得直线$AA_1,BB_1,CC_1$交于一点$O$，并假设$A_2,B_2,C_2$是三角形$A_1B_1C_1$（$\triangle T_1$）的边上的点，使得直线$A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2$交于一点$O_1$，则直线 $AA_2,BB_2$，$CC_2$也交于一点[图78(a)]。对这个定理作配极，则三角形$T$变成三角形 $t$，它的边是$T$的顶点的极线$a,b,c$；点$O$变成直线$o$，而三角形 $T_1$ 则变成三角形 $t_1$，它的边是 $t$ 的顶点与它的对边和 $o$ 的交点的连线 $a_1,b_1,c_1$；点$O_1$ 变成直线 $o_1$，而点$A_2,B_2,C_2$ 则变成$t_1$的顶点与它的对边和$o_1$ 的交点的连线$a_2$，$b_2,c_2$[图78(b)]。

由于问题 38(a)的定理告诉我们直线 $AA_2,BB_2,CC_2$ 共点，因此可以推出直线偶$a$和$a_2$，$b$和$b_2$，$c$和$c_2$的交点共线。于是我们得到下述定理：如果$t_1$是一个三角形，它的边在三

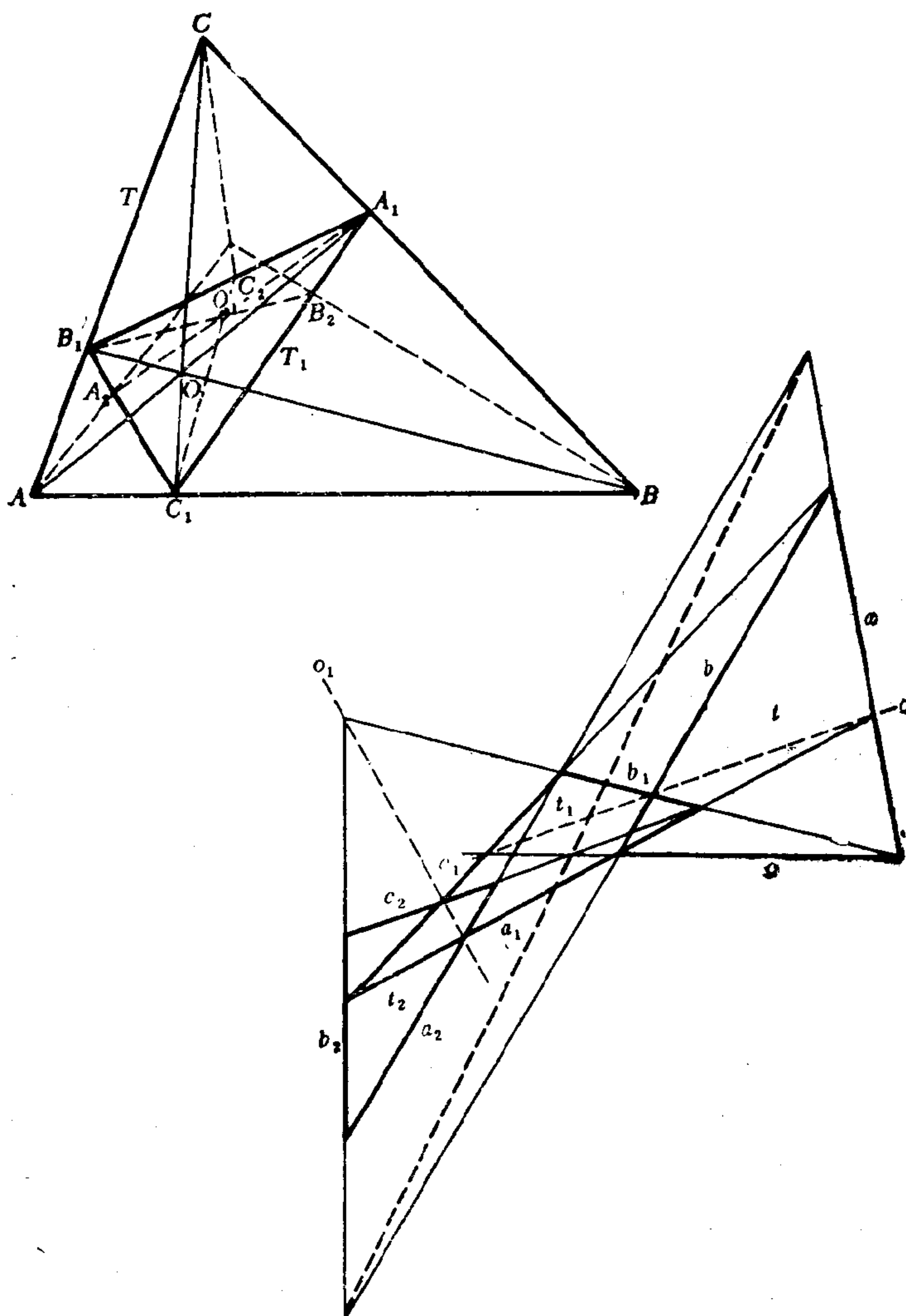



图 78

角形 $t$ 的顶点与它们的对边和一直线 $o$ 的交点的连线上；又设$t_2$是一个三角形，它的边在连结 $t_1$ 的顶点与它们的对边和某一直线$o_1$的交点的直线上，则三角形 $t$ 和 $t_2$ 的对应边的交点共线。这是一个用新的图形描绘的完全新的定理，它的成立由问题 38(a)的定理和配极的性质 A 所保证，从而无需再另外给出证明①。

60. 试问：对问题17(a),(b)；21(a),(b)；22,25,26,27,28中的定理作配极，得到的是一些什么样的定理？

61. 在一平面上给定 $n$ 条共点的直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 和 $n$ 个点$M_1, M_2, \cdots, M_n$。试作一个 $n$ 角形$A_1A_2\cdots A_n$，要求它的顶点在直线$l_1, l_2, \cdots, l_n$上，而它的边又经过点$M_1, M_2, \cdots, M_n$。

§5中的问题90是问题61的一个相当大的推广。

62. 试问：对问题 36(a)—(d)；37(a)—(c)；38(b)中的定理作配极，将得到那些定理？

63. 试问：通过对问题 39(a),(b)，40(a),(b)，41，43(a),(b)，45,46,47,50中所提到的圆作配极，从这些问题得到的是些什么定理？

64. 试问：如果我们对问题42关于圆 $S$ 作配极，将得到什么定理？

65. 给定一个圆 $S$ 和三条直线 $l, l_1, l_2$，试作 $S$ 的外切四边形 $ABCD$，使得$A$和$C$在 $l$ 上，$B$在 $l_1$上，而$D$ 在 $l_2$上。

---

① 注意，严格地说，用配极导出新的定理需要将一个配极作用两次。只要我们对刚才讲的例子作进一步的分析就可明白这一点。对给定的定理（在这里就是问题38(a)中的定理）作一次配极变换，可以得到一个新的定理的陈述。我们不能肯定新的定理在所有的情形下都是真的（对于 $t, o$ 和 $o_1$ 完全任意的图78(b)，我们不能断定它能够通过对图78(a)作一次配极得到）；为证明所得到的定理，必须作第二次配极把它归结为原来的定理。

§5中的问题84(b)是这个问题的推广。

66. 试从梅内劳斯定理(参看§2中的问题34(a))利用配极得到塞瓦定理(问题34(b)),并且反过来,从塞瓦定理得到梅内劳斯定理。

下面我们考虑配极的其它的性质。

B. 关于圆 $S$ 的配极把平行线变成和 $S$ 的中心 $O$ 共线的点,反过来,把同 $S$ 的中心 $O$ 共线的点变成平行线(图79)。

这个性质是下列事实的直接推论:直线 $a$ 的极点在经过 $S$ 的中心,且垂直于 $a$ 的直线上(参看第86页)。

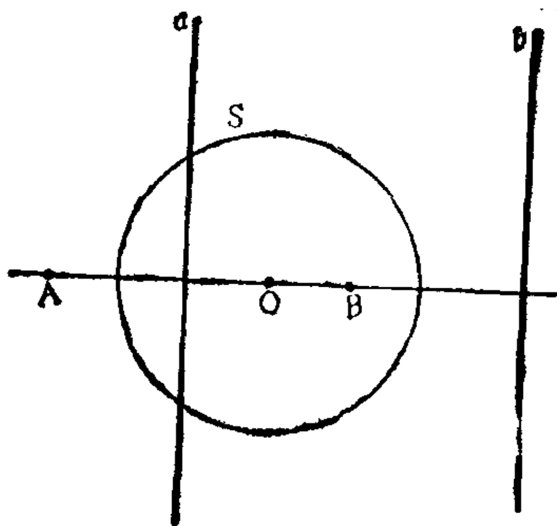


图 79

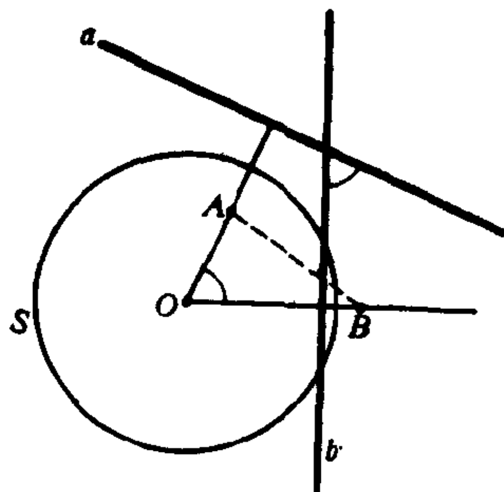


图 80

C. 设 $A$ 和 $B$ 是两个点,$a$ 和 $b$ 是它们在关于中心为 $O$ 的某个圆 $S$ 的配极下的象。则直线 $a$ 和 $b$ 的夹角等于线段 $AB$ 对 $O$ 点所张的角(或它的补角)。

这个性质也可以从点 $A$ 的极线 $a$ 与直线 $OA$ 互相垂直推出来,因为它说明直线 $a$ 和 $b$ 的夹角的边与 $OA$ 和 $OB$ 的夹角的边两两垂直(图80)。

配极的性质B和C使得我们可以从初等几何的许多定理得到新的定理。例如，考虑命题：内接于半圆的角是直角[图81(a)]。关于所说的圆作配极，则点$A,B,C$变成$S$的切线$a,b,c$；特别地，如果$A$和$B$是$S$的对径点，则切线$a$和$b$平行(参看配极的性质B)。考虑到配极的性质C，我们立刻可以断定：如果$S$是中心在$O$点的圆，$S$的两条平行切线交$S$的第三条切线于点$K$和$L$，则角$KOL$是直角[图81(b)]。

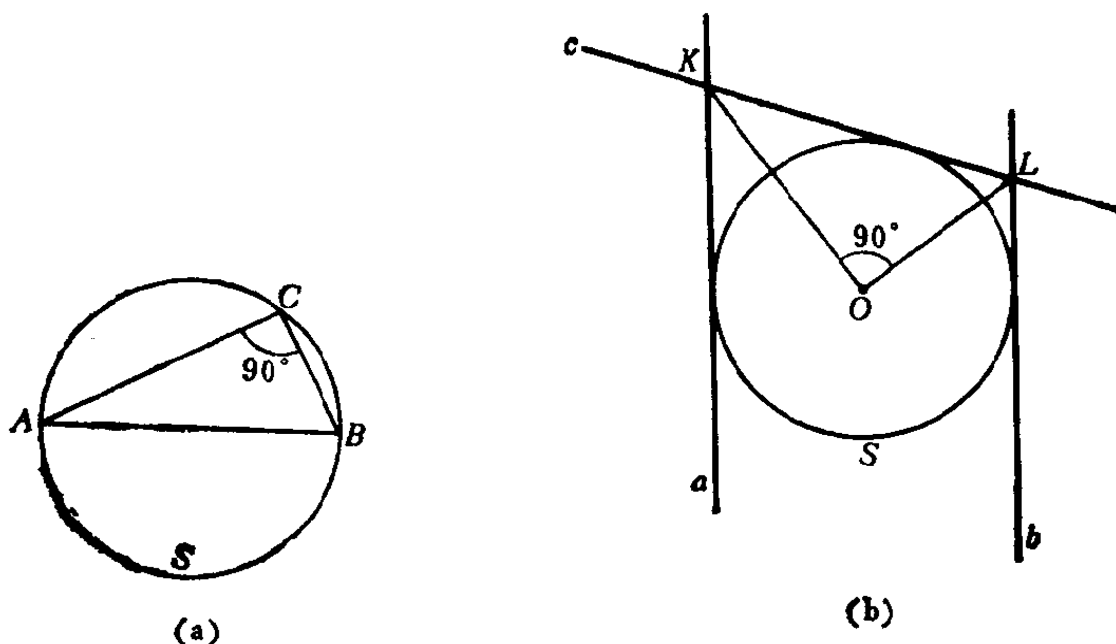



图 81

下面是另一个较为复杂的例子。以平行四边形的边的中点作为顶点的四边形也是一个平行四边形(图82(a)；看《几何变换》第一册中的问题16(a))。这几乎是显然的。我们来看看对这个命题作配极可以得到什么命题。

首先，我们必须用在配极下其象为已知的东西来定义平行四边形的边的中点(因为我们不知道线段的中点在配极下的象是怎样的直线)。我们采用的定义是：平行四边形的边

的中点是它的边和它的中线——经过对角线的交点平行于该边的直线——的交点.

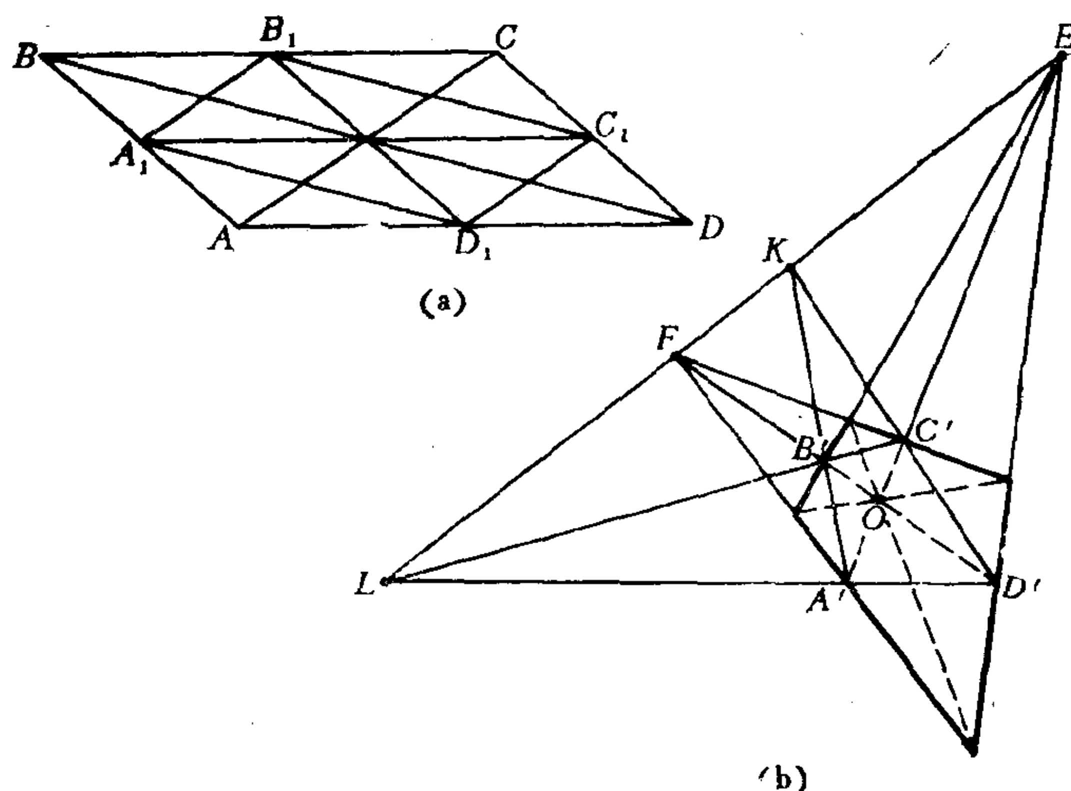



图 82

由配极的性质 B，$\square ABCD$ 变成四边形 $A'B'C'D'$，它的对角线的交点和 $S$ 的中心 $O$ 重合(看图82(b)；$S$ 在图中没有画出来)。平行四边形的对顶点变成四边形 $A'B'C'D'$ 的对边，平行四边形的对角线变成四边形的两对对边的交点 $K$ 和 $L$，而对角线的交点则变成直线 $KL$。根据配极的性质 B 和 C，平行四边形的中线变成四边形 $A'B'C'D'$ 的对角线 $A'C'$ 和 $B'D'$ 与直线 $KL$ 的交点 $E$ 和 $F$. 从而平行四边形的边的中点变成直线 $EB'$ 和 $ED'$ 以及 $FA'$ 和 $FC'$，而原命题则变成如下的对偶命题：其边在直线 $FA'$, $EB'$, $FC'$ 和 $ED'$ 上的四边形的对角线的交点与四边形 $A'B'C'D'$ 的对角线的交点重合[图82(b)]。

这个新命题既不是明显的，也不是简单的。它的直接证明是相当复杂的。

67. 试用配极的性质B证明德札尔格定理(§2问题22)。

68. 设$S$是三角形$ABC$的内切圆，$l$是$S$的切线，$M,N,P$是$l$同$\triangle ABC$的边的交点(图83)。从$S$的中心$O$分别引垂直于直线$OM,ON,OP$的直线，它们同这个三角形的对应边的交点用$M_1,N_1,P_1$表示。试证明点$M_1,N_1,P_1$在$S$的一条切线上。

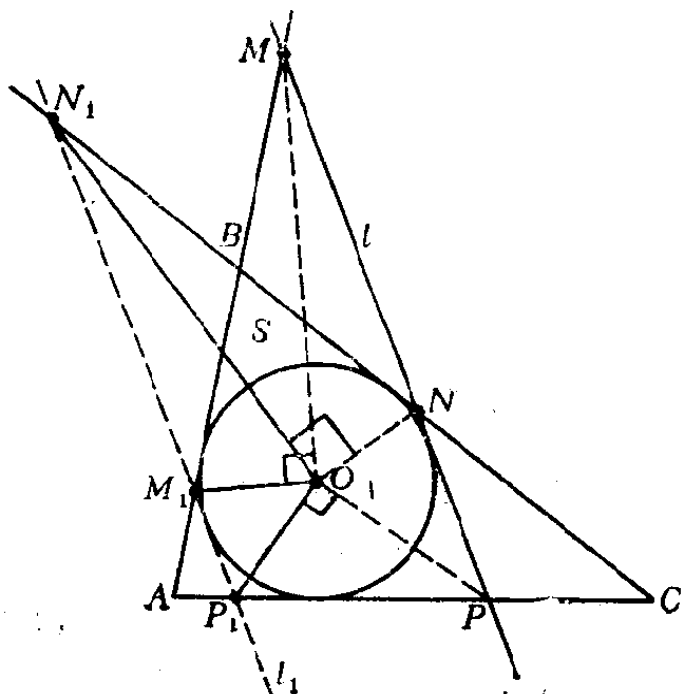


图 83

69. 在圆中，同弧所张的圆周角相等。试叙述对这个命题作配极所得到的新命题。

70. 对关于辛姆逊(Simson)线的定理(《几何变换》第二册，第二章，§1中的问题61)作配极得到一个新的定理，试叙述之。

71. 三角形的中线共点。对这个定理作配极，这个配极所用的圆是该三角形的外接圆。试陈述所得到的新定理。

72. 如果平行四边形的对角线正交，则它们平分顶角。对这个定理作配极，试陈述所得到的定理。

73. 试陈述对下列定理作配极所得到的定理：

(a) 三角形的高线共点；

(b) 三角形的平分角线共点。

74. 试给出一对对偶定理的例子。

除了性质 A—C外， 配极还有其它的性质，例如在问题51和52中所给出的那些性质，在从已知定理获得新定理时它们也是有用的[1]。例如，假若我们用性质C和问题51中的定理，就容易证明，从《几何变换》第二册，第二章，§2中问题81(a)的定理，通过配极可以得到下述定理：如果 $p_1, p_2, p_3$ 是从一点 $O$ 到三角形 $ABC$ 的三条边的距离，并且这些边对 $O$ 点所张的角相等(或互补)[2]，则 $1/p_1, 1/p_2, 1/p_3$ 中的最大数不超过其余两数之和。类似地，利用问题52，从第二章§4中的问题254(a)[3]可以得到下列结果：

设 $S$ 是 $2n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的内切圆， $l$ 是 $S$ 的任意一条切线。则从该 $2n$ 角形的偶数编号的顶点到 $l$ 的距离之积等于从奇数编号的顶点到 $l$ 的距离之积。

设 $S$ 是 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内切圆， $l$ 是 $S$ 的任意一条

---

① 从问题51可以推出，关于以 $O$ 为中心，1为半径的圆 $S$ 的配极，到 $O$ 点距离为 $d$ 的点 $A$ 将变成到 $O$ 点距离为 $1/d$ 的直线 $a$，并且将彼此相距为 $d$ 的两个点 $A$ 和 $B$ 变成两条这样的直线 $a$ 和 $b$，它们要满足条件 $A'B'/(OA'\cdot OB')=d$；这里 $A'$ 和 $B'$ 分别表示 $O$ 在 $a$ 和 $b$ 上的射影。从问题52可以推出，这同一个配极将点 $A$ 和到 $A$ 的距离为 $d$ 的直线 $b$ 变成直线 $a$ 和到 $a$ 的距离为 $d\cdot OB/OA$ 的点 $B$。关于这些结论的应用，例如，可以看第93页上的注。

② 如果三角形 $ABC$ 的三个角都小于120°，则 $O$ 是这个三角形的内点，且所说的那些角都等于 120°。如果这个三角形是钝角三角形，且它的钝角大于120°，则不存在使得所说的角都相等的点；那时 $O$ 是三角形的外点。所说的三个角中有两个角等于 60°，而三角形的最大边所张的第三个角等于120°。最后，如果三角形有一个角等于 120°，则点 $O$ 和该角的顶点重合，这个定理没有意义。

这个点 $O$ 有一些值得注意的性质（其中有一些在《几何变换》第二册，第二章，§2中讨论过）；在文献中有时称它为这个三角形的托里拆利(Torricelli)点。

③ 参看《几何变换》第四册，——英译者

切线。则从该$n$角形的顶点到$l$的距离之积等于从该$n$角形与圆的切点到$l$的距离之积。

设$S$是正$n$角形$A_1A_2\cdots A_n$的内切圆，$l$是$S$的任意一条切线。如果从这$n$角形的顶点到$l$的距离$d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}$之最小值为$d_0$，则有

$$\frac{1}{d_0}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_{n-1}}.$$

我们把用配极获得这些结果的工作留给读者。

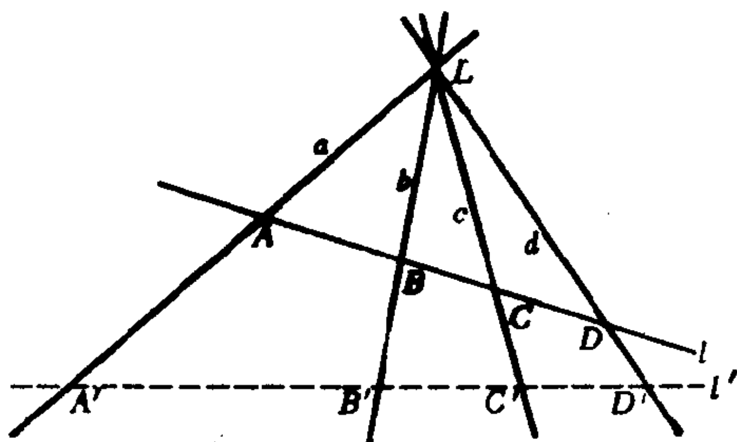



图 84

大家注意，配极还有一个性质，它在包含这种变换的比较深的工作中将起基本的作用。为了陈述这个性质，我们必须先引进与共线四点的交比（参看第43页）相类似的所谓共点四线$a,b;\ c,d$的交比。这种交比定义为给定的这四条直线同任意第五条直线$l$（不经过给定四条直线的公共点，参看图84）的交点$A,B;\ C,D$的交比。显然，四条直线$a,b;\ c,d$的这种交比与直线$l$的选取无关；因为如果另一直线$l'$同$a,b,c,d$分别交于点$A',B',C',D'$，则$A',B';\ C',D'$的交比等于点$A,B;\ C,D$的交比（根据中心射影的性质C；参看图84和图34）[1]。

现在我们可以叙述配极的另一个性质：

D. 如果配极将直线 $l$ 上的四个点 $A,B,C,D$ 变成四条直线 $a,b,c,d$(由配极变换的性质A，这些直线交于一点 $L$)，则四条直线 $a,b;c,d$ 的交比等于四个点 $A,B;C,D$ 的交比。

性质D的证明是简单的。考虑直线 $l$ 上的四个点 $A,B,C,D$ 和它们关于圆 $S$ 的极线 $a,b,c,d$(图85)。从四条直线的交比的定义，可以推出点 $A,B;C,D$ 的交比等于直线 $OA,OB;OC,OD$ 的交比，其中 $O$ 是 $S$ 的中心。由于一点关于圆 $S$ 的极线垂直于该点同 $S$ 的中心的连线(参看第43页)，从而直线 $OA,OB,OC,OD$ 分别垂直于直线 $a,b,c,d$。由此可以断定，两组四条直线 $a,b,c,d$ 和 $OA,OB,OC,OD$ 经过适当的运动可以重合；事实上，先将直线 $OA,OB,OC,OD$ 作平移，使得 $O$ 和 $L$ 重合，然后再将这些直线绕 $L$ 旋转 $90°$，就可实现这一点。从而推出四条直线 $OA,OB;OC,OD$ 的交比等于四条直线 $a,b;c,d$ 的交比；所以四个点 $A,B;C,D$ 的交比也等于四条直线 $a,b;c,d$ 的交比，这就是我们所要证明的。

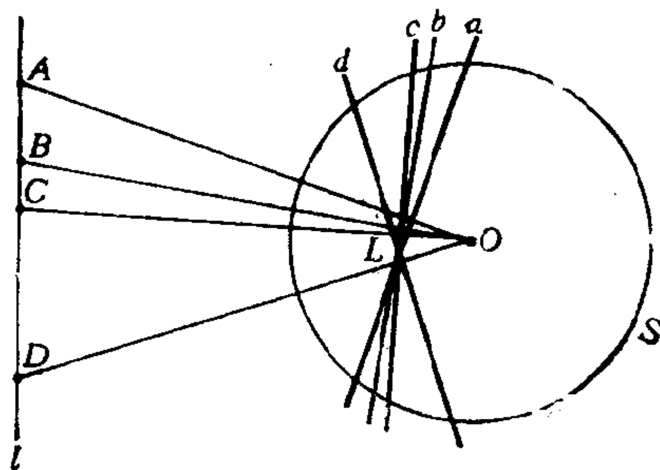



图 85

---

① 可以证明，四条直线 $a,b;c,d$ 的交比等于

$$\frac{\sin\angle(a,c)}{\sin\angle(b,c)}\Big/\frac{\sin\angle(a,b)}{\sin\angle(b,d)},$$

其中 $\angle(x,y)$ 表示直线 $x$ 和 $y$ 所夹的角。

## 5. 直线和圆的射影变换·直尺作图

设 $l$ 和 $l'$ 是一平面上两条不同的直线，$O$ 是该平面上的一点，它不在这些直线上。从 $O$ 将 $l$ 射影到 $l'$，即对于 $l$ 上的每一个点 $P$，以 $l'$ 和直线 $OP$ 的交点 $P'$ 与它相对应(图86)。注意，如果 $l$ 不平行于 $l'$，则 $l$ 同经过 $O$ 点平行于 $l'$ 的直线的交点 $X$，在这个射影下没有 $l'$ 上的任何点与它相对应。为了使 $X$ 同其它的点处于平等的地位，我们说 $X$ 射影到 $l'$ 的无穷远点。类似地，对于 $l'$ 同经过 $O$ 点平行于 $l$ 的直线的交点 $Y'$，在这个射影下，我们说它是 $l$ 的无穷远点的象。

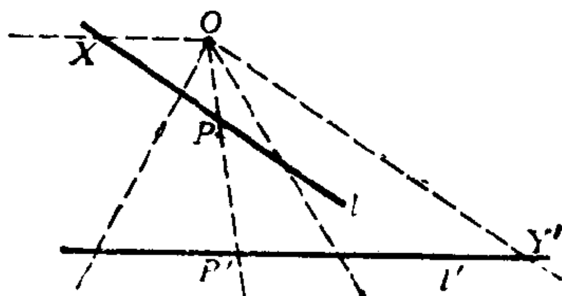



图 86

若直线 $l$ 和 $l'$ 平行[图87(a)]，则说这个射影将 $l$ 的无穷远点变成 $l'$ 的无穷远点。若从 $l$ 到 $l'$ 的射影是平行射影[图87(b)]，我们也说 $l$ 的无穷远点变成 $l'$ 的无穷远点。

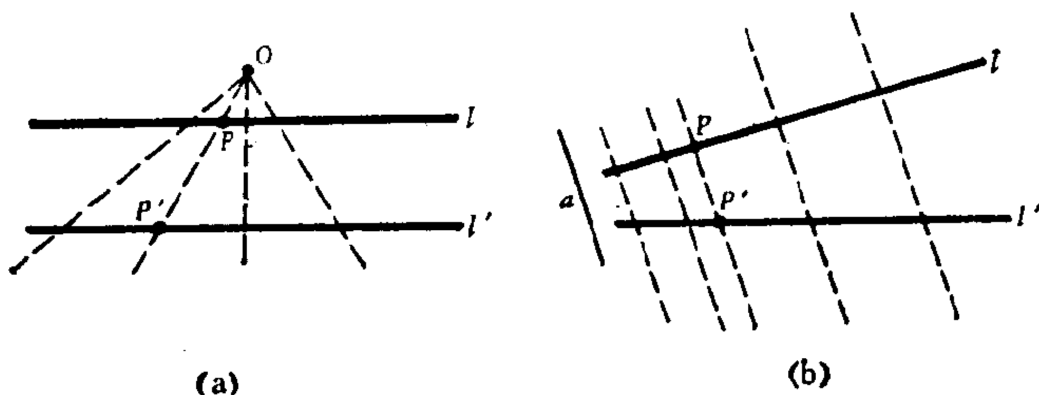



图 87

中心(或平行)射影不是直线到它自身上的变换，而是从

一直线到另一直线上的映射。现在，从点 $O$ 将直线 $l$ 射影到直线 $l_1$ 上，再从点 $O_1$ 将直线 $l_1$ 射影到直线 $l_2$ 上，然后从点 $O_2$ 将直线 $l_2$ 射影到 $l_3$ 上，等等，最后又从点 $O_n$ 将直线 $l_n$ 回过来射影到 $l$ 上(图88)。这一连串射影先将 $l$ 上的点 $A$ 变到 $l_1$ 上的点 $A_1$，又射影到 $l_2$ 上的点 $A_2$，再射影到 $l_3$ 上的点 $A_3$，等等，最后射影到原直线 $l$ 上的点 $A'$，如此，这一串中心射影确定了 $l$ 到它自身上的一个变换，它将点 $A$ 变成点 $A'$。我们把直线上的这种变换称为一个**射影变换**或**射影**。在上面的一串射影中有一个或几个是平行射影而不是中心射影的情形，也一样叫做射影变换①。

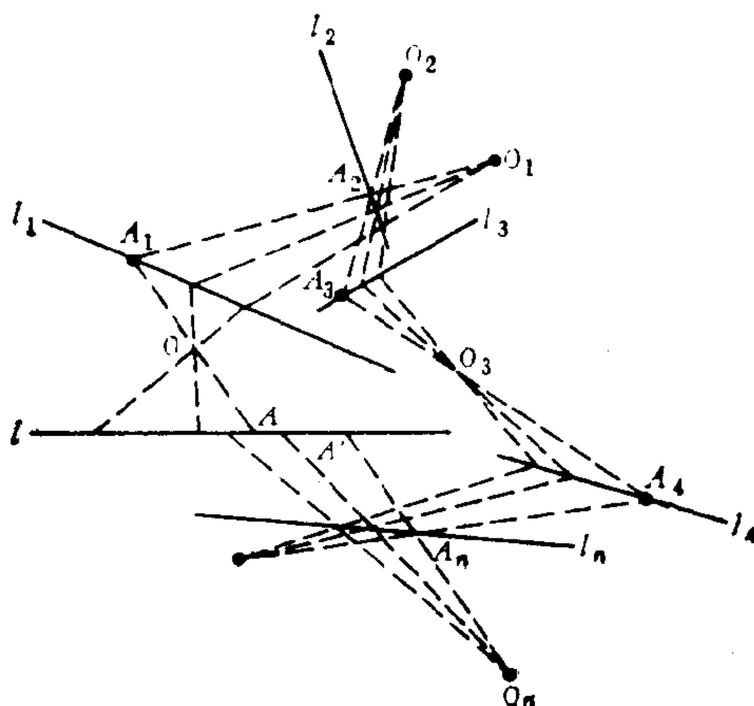



图 88

下面是射影的基本性质：**直线的射影保持四个点的交比不变**。实际上，一条直线到另一条直线上的中心射影保持四个点的交比不变(参看第44页中心射影的性质C)。类似地，

---

① 只要引进平面的无穷远点的概念（参看§2），我们就能将直线到直线的平行射影看成中心在无穷远点的中心射影。

直线到直线上的平行射影也保持四个点的交比不变(它甚至保持三个点 $A,B,C$ 的单比 $AC/BC$)。由此，直线的射影变换(用一串射影实现)将四个点变成有相同交比的四个点。

从这个基本性质可以推出：直线的射影由三个点的象完全确定。实际上，如果三个点 $A,B,C$ 在射影变换下的象是三个已知的点 $A',B',C'$，则该直线上任意点$M$的象应是满足下式的点 $M'$

$$(*)\qquad \frac{AC}{BC}\Big/\frac{AM}{BM}=\frac{A'C'}{B'C'}\Big/\frac{A'M'}{B'M'}.$$

这个关系式唯一地确定了 $M'$ 的位置。

另一方面，存在直线的一个射影，它将三个给定的点 $A,B,C$ 变成三个预先指定的点 $A',B',C'$。为了实现这个变换，可以先将我们的直线 $l$ 射影到任意直线 $l_1$ 上，它把点 $A,B,C$ 变成 $l_1$ 上的点 $A_1,B_1,C_1$；再将直线 $l_1$ 射影到与 $l$ 交于点 $A'$ 的任意直线 $l_2$ 上，这时 $A_1$ 变到 $A'$，而 $B_1,C_1$ 变到 $l_2$ 上的点 $B_2,C_2$；最后，用直线 $B'B_2$ 与 $C'C_2$的交点$O$作为射影的中心，将 $l_2$射影到直线 $l$ 上(图89)。$O$照例可以是通

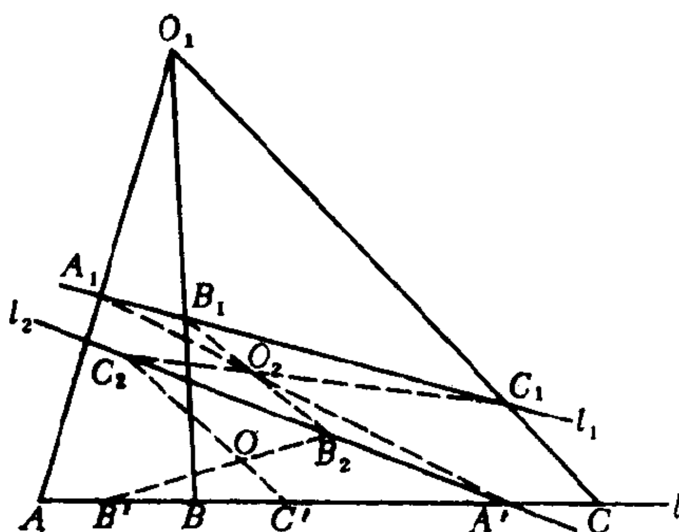



图 89

常的点或无穷远点。

现在容易证明，直线的保持其上任意四个点的交比的变换必是射影变换(即它能够通过一串射影实现)。为此，考虑直线上的一个变换，它保持其上任意四个点的交比不变，并假定三个点 $A,B,C$ 变成点 $A',B',C'$。我们知道，存在一个射影将点 $A,B,C$ 变为 $A',B',C'$。其次。如果直线的两个变换都保持四个点的交比不变，并且在直线的同一组三个点上它们确定的象是相同的，则必然将任意的第四个点$M$变成同一个点 $M'$(它的位置由上页中的公式(*)确定)，即这两个变换是相同的。

75. 试用直线上的射影的性质证明帕普斯定理(参看§2的问题28)。

76. 试用直线上的射影的性质证明§2中问题37(a)的定理。

77. 将正 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边 $A_1A_2$ 上的一个点 $M_1$，从 $A_n$ 射影到边 $A_2A_3$ 上的一个点 $M_2$；然后从 $A_1$ 将 $M_2$射影到边 $A_3A_4$ 上的一个点 $M_3$；再从 $A_2$ 将 $M_3$ 射影到边 $A_4A_5$上的一个点 $M_4$；等等。试证明：

(a) 如果 $n=4$，则绕这个 $n$ 角形三周以后所得到的点 $M_{13}$ 与起点 $M_1$ 重合（所以 $M_{14}$ 与 $M_2$ 重合，$M_{15}$ 与 $M_3$ 重合，等等)。

(b) 如果 $n=6$，则绕这个 $n$ 角形两周以后所得到的点 $M_{13}$ 与起点 $M_1$ 重合（所以 $M_{14}$ 与 $M_2$ 重合，$M_{15}$ 与 $M_3$ 重合，等等)。

(c) 如果 $n=10$，则绕这个 $n$ 角形一周以后所得到的点 $M_{11}$ 与起点 $M_1$ 重合(所以，$M_{12}$ 与 $M_2$ 重合，$M_{13}$ 与 $M_3$ 重

合，等等）。

下面，我们来考虑包含直线和圆的一串射影。例如，从圆$S$上的一个点$O_1$将$S$射影到直线$l_1$上；然后从一个点$O_2$将$l_1$射影到直线$l_2$上；再从圆$S_3$上的一点$O_3$将$l_2$射影到这个圆上；接着从$S_3$上的另一个点$O_4$将$S_3$射影到直线$l_4$上；最后，从$S$的一个点$O_5$将$l_4$射影到圆$S$上（图90）①。第一个射影将$S$上的任意一点$A$变成$l_1$上的一点$A_1$，第二个射影将$A_1$变成$l_2$上的一点$A_2$，第三个射影又将$A_2$变成$S_3$上的一点$A_3$，第四个射影再将$A_3$变到$l_4$上的一点$A_4$，最后，末一个射影将$A_4$变成$S$上的一点$A'$。

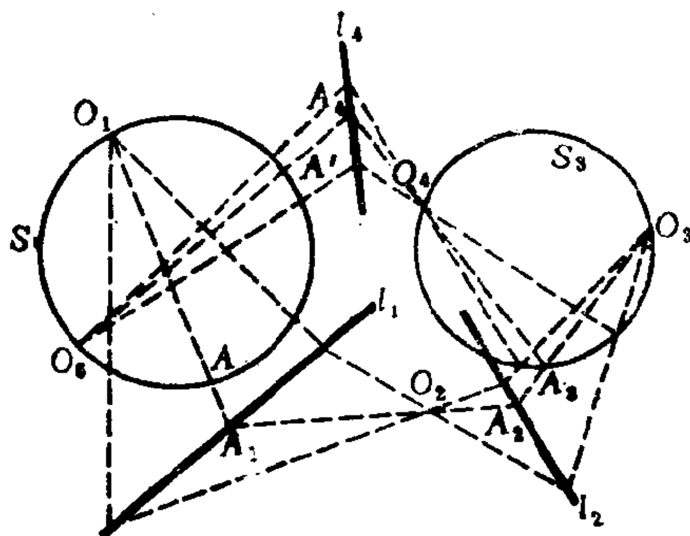



图 90

这样一来，上面的一串射影确定了圆$S$到它自身上的一个变换，它将$A$变成$A'$。我们把能用上面所说的那些射影

① 一个圆必须从在该圆上的一点$O$才能作射影，实际上，如果$O$在圆内，则这个圆上的两个点将射影到直线上的同一个点，如果$O$在圆外，则直线上的某些点将有两个原象，而其它的点则没有原象。

**的序列实现的圆的变换称为（该圆上的）射影。**

所谓圆 $S$ 的四个点 $A, B; C, D$ 的交比，我们定义为在从 $S$ 上任意一点 $P$ 到任意一条直线 $l$ 上的射影下，点 $A, B, C, D$ 的四个象点 $A_1, B_1; C_1, D_1$ 的交比(图91)。不难证明，圆 $S$ 上四个点的交比，跟 $S$ 上点 $P$ 和直线 $l$ 的选取无关，即它的值由四个点 $A, B, C, D$ 完全确定。实际上，设从 $S$ 上的某个点 $Q$ 将 $S$ 射影到任意一条直线 $m$ 上，点 $A, B, C, D$ 的象是点 $A_2, B_2, C_2, D_2$(图91)。根据圆周角的众所周知的性质，直线 $PA, PB, PC, PD$ 所构成的角和由直线 $QA, QB, QC, QD$ 所构成的角相等（或互补）。在直线 $QA, QB, QC$ 和 $QD$ 上分别截取线段 $QA^* = PA_1$，$QB^* = PB_1$，$QC^* = PC_1$，$QD^* = PD_1$。则图形 $QA^*B^*C^*D^*$ 和 $PA_1B_1C_1D_1$ 全等(它们可以经过运动重合在一起：将 $Q$ 移到 $P$，并使射线 $QA^*$ 和 $QB^*$ 分别同射线 $PA_1$ 和 $PB_1$ 重合)。从而点 $A^*, B^*, C^*, D^*$ 在一条直线 $m^*$ 上，且四个点 $A^*, B^*; C^*, D^*$ 的交比等于四个点

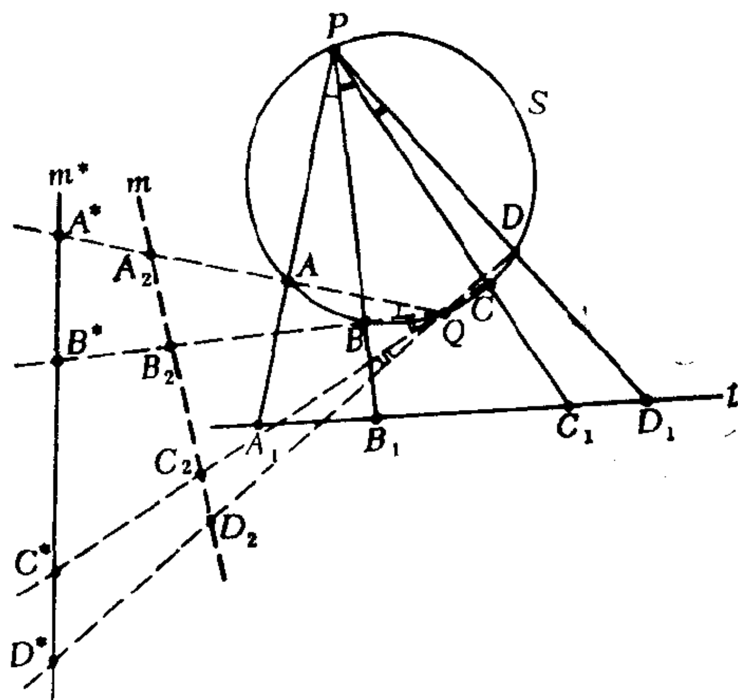



图 91

$A_1, B_1$; $C_1, D_1$ 的交比。另一方面，在以 $Q$ 为中心的从直线 $m$ 到直线 $m^*$ 上的射影下，$A^*, B^*, C^*, D^*$ 是 $A_2, B_2, C_2, D_2$ 的象；因此 $A^*, B^*$; $C^*, D^*$ 和 $A_2, B_2$; $C_2, D_2$ 的交比相等。从而 $A_2, B_2$; $C_2, D_2$ 和 $A_1, B_1$; $C_1, D_1$ 的交比相等。

由于直线到圆上(或圆到直线上)的射影保持四个点的交比不变，可以看到：圆上的射影保持四个点的交比不变。正如一条直线的射影一样，我们立即能够断定，圆上的射影由三个点的象完全确定。最后，容易证明，圆的保持四个点交比的每个变换是一射影(即它能够通过一串射影实现)。为此只须证明，存在一个射影把圆 $S$ 的三个给定的点 $A, B, C$ 变成该圆的三个预先指定的点 $A', B', C'$(参看第111页)。为给出这种变换，从一点 $O_1$ 将 $S$ 射影到直线 $l_1$ 上，点 $A, B, C$ 的象以 $A_1, B_1, C_1$ 表示；再从连接 $A'$ 和 $A_1$ 的直线同 $S$ 的另一个交点 $O_2$，将 $S$ 射影到经过 $A_1$ 的直线 $l_2$ 上，以 $A_1, B_2, C_2$ 表示 $A', B', C'$ 的象；最后，将 $l_1$ 射影到 $l_2$ 上，使得 $A_1, B_1, C_1$ 变成 $A_1, B_2, C_2$(图92)，用 $O$ 表示这个射影的中心。显然，这一串射影——从 $O_1$ 将 $S$ 射影到 $l_1$ 上，从 $O$ 将 $l_1$ 射影到 $l_2$ 上，再从 $O_2$ 将 $l_2$ 射影到 $S$ 上——把点 $A, B, C$ 变成点 $A', B', C'$，它正是我们所要的。

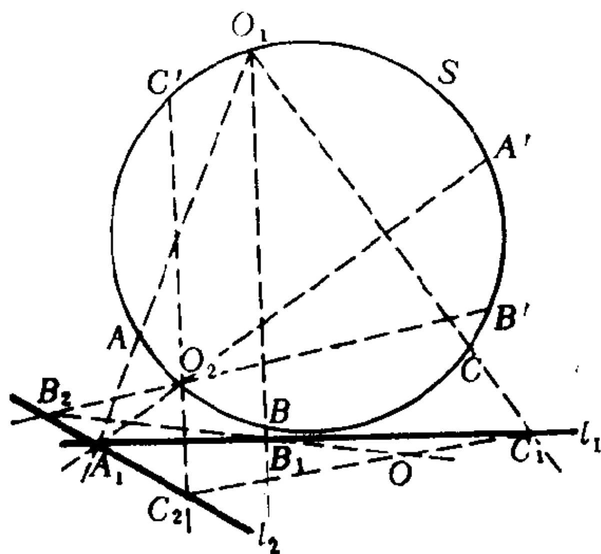


图 92

78. (a) 设$O$是圆$S$的弦$AB$的中点，$MN$和$PQ$是经过$O$点的另外两条弦。又设$E$,$F$分别是$MP$和$NQ$同$AB$的交点。试证明$O$是线段$EF$的中心(图93)。

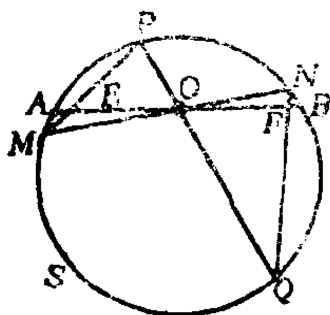


图 93

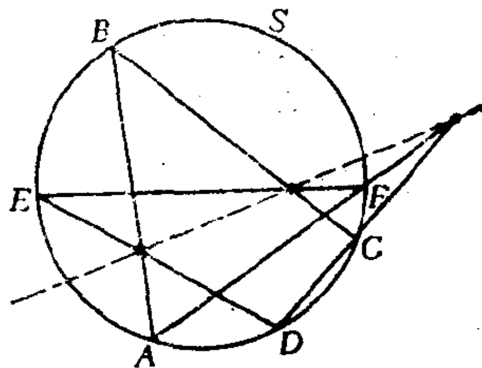


图 94

(b) 设$O$是从圆$S$的中心到直线$l$的垂线的垂足，$MN$和$PQ$是$S$的两条弦，交$l$于点$C$和$D$，并且$OC=OD$。用$E$和$F$分别表示$MP$和$NQ$同$l$的交点。试证明$O$是$EF$的中点。

79. 试用圆上的射影的性质，证明§3问题41(a)—(c)中的那些定理。

80. 试用圆上的射影的性质，证明巴斯卡定理：假若$A$,$B$,$C$,$D$,$E$,$F$是一个圆上的六点，则$AB$和$DE$，$BC$和$EF$，$CD$和$FA$的交点共线（图94；参看§3的问题46)。

大家注意，在问题80中陈述的结果比问题46的要强，在那里我们假定内接在圆中的六边形$ABCDEF$是凸的，而在问题80中的六边形$ABCDEF$则可以自相交。对于问题46中考虑的每个六边形，在问题80中有60个和它有相同顶点的六

边形，它们对应于顶点的标记的60种可能的排列①。因此，对于圆上的六个点，有60条“巴斯卡线”和它相联系②。

大家注意，由于勃良松定理（参看§3问题47）可以从巴斯卡定理推出来(参看§4问题63的解)；对于自相交的六边形（图95）用问题80的定理可以推出勃良松定理成立。

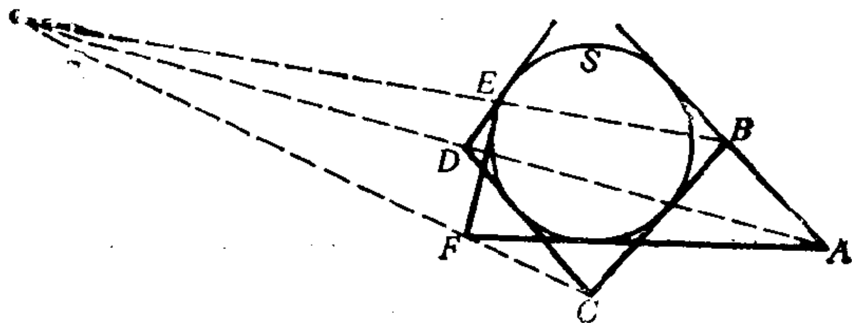



图 95

81. (a) 试从巴斯卡定理推出§3中问题45的结论。

(b) 从三角形 $ABC$ 所在平面上的一点 $T$，到它的边 $AB$ 和 $AC$ 作垂线 $TP$ 和 $TQ$；再用直线分别连接 $T$ 和顶点 $B$，$C$，并作直线 $TC$ 和 $TB$ 的垂线 $AR$ 和 $AS$（图96）。试证明直线 $PR$ 和 $QS$ 的交点在直线 $BC$ 上。

---

① 对于给定的六个点，有60个六边形以它们为顶点。实际上，从任意一个顶点开始，第二个顶点有5种不同的选法，第三个顶点有4种选法，第四个顶点有3种选法，第五个顶点有2种选法，而最后一个顶点则是唯一确定的。所以总共有 $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 种可能的选法，由于每个六边形被考虑了两次(按照遍历它们的两种可能的转向)，这个数目应当减半。

② 上世纪的几何学家发现，用上面指出的方法所得到的60条直线组成的集合，有许多值得注意的性质．诸如这60条直线四条一组有45个交点(每条巴斯卡直线经过其中的三个点)，三条一组有80个交点（每条巴斯卡直线经过其中的四个点)；除了巴斯卡直线外，后面的那80个点在20条新的直线上，它们又四条一组地交于15个新的点；等等．所有这些结果从德札尔格定理（§2问题22）、巴斯卡定理和勃良松定理可以相当容易地推出来；然而这些证明将使我们离题太远，在此无法给出。

图 96

(c) 设 $MP,MQ,MR$ 是从点$M$到三角形 $ABC$ 的边的垂线，$P',Q',R'$ 是这三角形的边同经过 $P,Q,R$ 的圆 $S$ 的另一个交点（图97）。试证明：$PQ'$ 和 $P'Q$，$PR'$ 和 $P'R$，$QR'$ 和 $Q'R$ 的交点在直线 $OM$ 上，这里 $O$ 是 $S$ 的中心。

图 97

常常需要确定一个圆上的射影的不动点，即在给定的这个射影变换下变成自己的那种点。假设这个射影由下列条件确定：它将 $S$ 上给定的三个点 $A,B,C$ 变成 $S$ 上已知的三个点 $A',B',C'$。我们可以假定点 $A,B,C$ 不与 $A',B',C'$ 重

合；否则这个射影就是恒同变换，从而圆上所有的点都成为不动点[①]。如此，不妨设 $A'$ 不同于 $A$；并设$M$是圆 $S$ 上的一个点，$M'$ 是它在上述射影下的象（图98）。我们要来证明：直线 $AM'$ 和 $A'M$ 交在直线 $UV$ 上，其中 $U$ 是 $AB'$ 和 $A'B$ 的交点，$V$ 是 $AC'$ 和 $A'C$ 的交点。

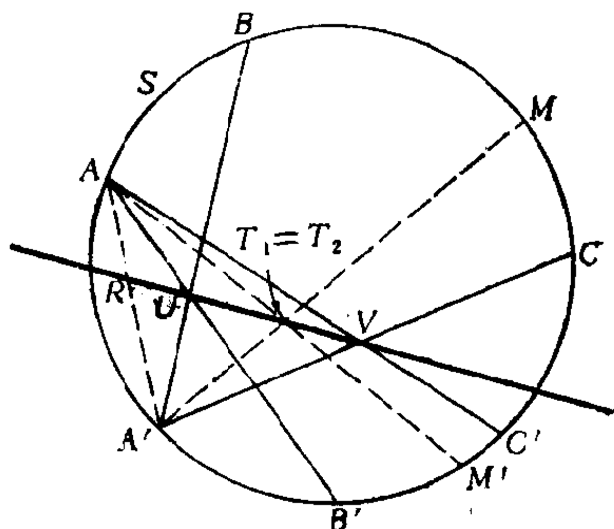



图 98

假定不是这样，以 $T_1$ 和 $T_2$ 分别表示直线 $A'M$ 和 $AM'$ 同 $UV$ 的交点；并设 $R$ 表示直线 $AA'$ 同 $UV$ 的交点。分别从 $A'$ 和 $A$ 把 $S$ 投影到 $UV$ 上，则 $S$ 上两组四个点 $A,B$；$C,M$ 和 $A',B'$；$C',M'$ 的交比分别等于 $UV$ 上两组四个点 $R,U$；$V,T_1$ 和 $R,U$；$V,T_2$ 的交比。根据将 $A,B,C$，$M$ 变成 $A',B',C',M'$ 的射影的存在性，这两组四个点的交比相等。所以 $R,U$；$V,T_1$ 和 $R,U$；$V,T_2$ 的交比相等，从而 $T_1$ 和 $T_2$ 重合。

现在我们可以看到，为了作出给定的点 $M$ 在上述射影下的象 $M'$，只需作 $A'M$ 和 $UV$ 的交点 $T$ 同 $A$ 的连线（在这里 $U$ 是 $AB'$ 和 $A'B$ 的交点，$V$ 是 $AC'$ 和 $A'C$ 的交点）；$M'$ 就是直线 $AT$ 同 $S$ 的交点。从这个作图可以推出：圆 $S$ 上的

---

① 由于圆上的射影被三个点的象唯一确定，保持三个点不动的那种变换必定是恒同变换。

一个射影的不动点，就是直线 $UV$ 同 $S$ 的交点。因此，根据 $UV$ 同 $S$ 交于两个点(这就是图98所示的情形)，或是 $S$ 的切线，或整个在 $S$ 的外部，可以推出这个变换分别有两个不动点，或一个不动点，或没有不动点。

注意，可以只用直尺，把圆 $S$ 的将三个点 $A, B, C$ 变成三个点 $A', B', C'$ 的射影变换的不动点作出来。

82. 设 $S$ 是一个圆，$AB$ 和 $CD$ 是 $S$ 的两条弦。试在 $S$ 上找出一点 $X$，使得直线 $AX$ 和 $BX$ 在 $CD$ 上确定

(a) 一个给定长度为 $a$ 的线段；

(b) 其中点是 $CD$ 上预先指定的点 $E$ 的一个线段。

在《几何变换》第一册中（参看 § 1 的问题 6 和 § 2 的问题11），问题82(a) 和 (b) 以一种不同的方式出现。

83. (a) 设 $l$ 是一条直线，$P$ 是不在 $l$ 上的一个点. 试在 $l$ 上找出一个线段 $XY$，它对 $P$ 点张成一个给定的角 $\alpha$ (即 $\angle XPY = \alpha$)。

(b) 设 $l_1$ 和 $l_2$ 是两条直线，$P$ 和 $Q$ 是不在这些直线上的两点. 试找出 $l_1$ 上的一个点 $X$ 和 $l_2$ 上的一个点 $Y$，使得线段 $XY$ 对 $P$ 点张成给定的角 $\alpha$，并对 $Q$ 点张成给定的角 $\beta$。

84. (a) 试在给定的圆中内接一个 $n$ 角形，使得它的边经过 $n$ 个给定的点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$[图99(a)]，或者使得某些边经过给定的点而其它的边平行于给定的直线。

(b) 试作给定圆的一个外切 $n$ 角形，使得它的顶点在 $n$ 条给定的直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 上[图99(b)]。

(问题84(a)和(b)也可以陈述如下：

(a) 试作一个 $n$ 角形，它内接于给定的圆 $S$，并外接于给定的 $n$ 角形 $M_1M_2\cdots M_n$(参看问题24(a)的注)。

(b) 试作一个 $n$ 角形。它内接于给定的 $n$ 角形 $N_1N_2\cdots N_n$，并外切于给定的圆 $S$。)

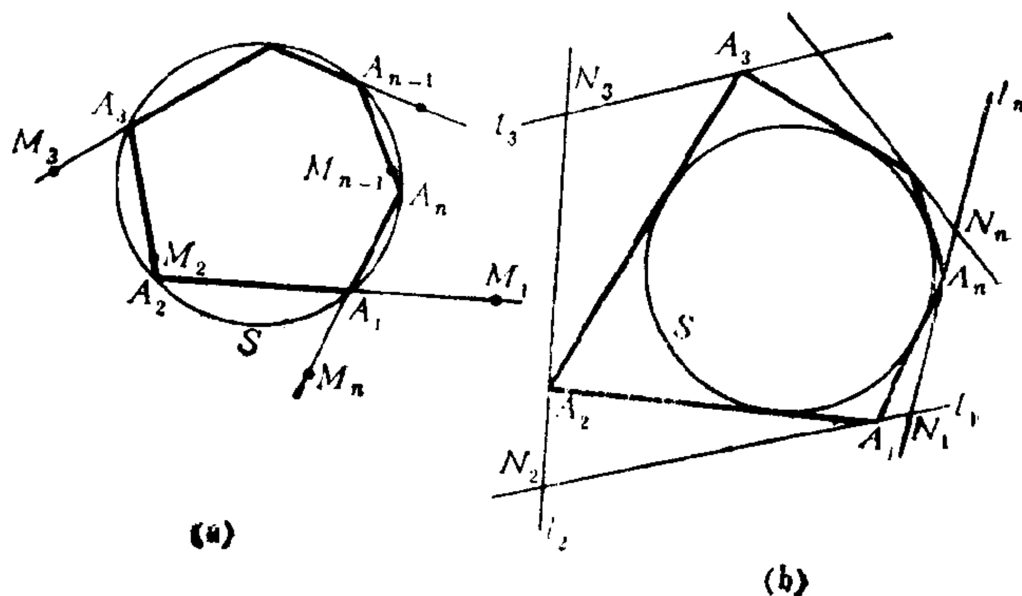



图 99

问题84的特殊情形是《几何变换》第一册中问题41(a)，(b)和本书§3的问题44(b)。问题84(a)以不同的关系出现在第二章的§2和§4中（参看问题231和259），而问题84(b)则出现在同一章的§5中(问题283)①。

85. (a) 试在给定的圆 $S$ 中作一个内接三角形 $ABC$，要求它的边 $AB$ 有给定的长度，边 $BC$ 沿给定的方向，而边 $AC$ 则经过一个给定的点。

(b) 试在给定的圆 $S$ 中作内接四边形 $ABCD$，已知它的两条对边上的两个点和另外两条对边的长度。

现在我们来考虑直线 $l$ 的射影变换，它将三个给定的点 $A, B, C$（在 $l$ 上）变成三个给定的点 $A', B', C'$（也在 $l$

① 这一段的最后一句话参看《几何变换》第四册。——英译者

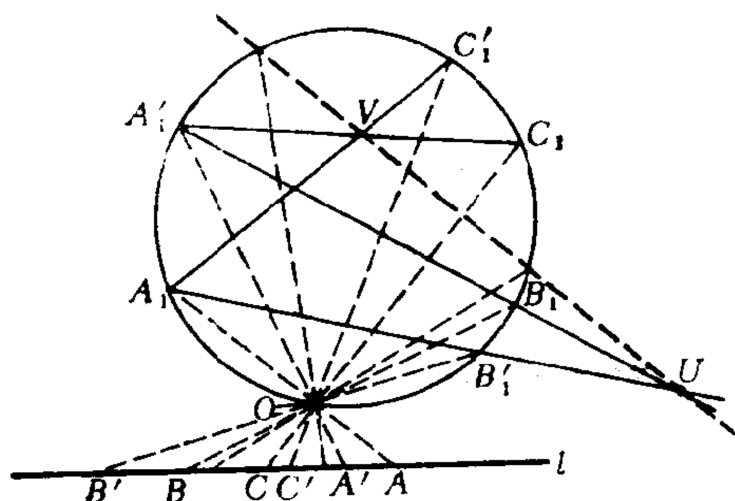



图 100

上），目的是要确定它的不动点。为解这个问题，引进辅助圆$S$，并从$S$上一个点$O$将$l$投影到$S$上（图100）。对于直线$l$上的每一个将点$M$变为点$M'$的变换，通过从$l$到$S$上的射影，相应地产生这个圆上的一个变换，它将$M$在这射影下的象$M_1$变为$M'$在这射影下的象$M_1'$，如果$l$的这个变换是射影，即保持交比不变，则在$S$上导出的变换也是射影(由于$S$上四个点的交比等于$l$上对应的四个点的交比)。现在设$A,B,C$；$A',B',C'$是$l$上的点，而$A_1,B_1,C_1$；$A_1',B_1',C_1'$是它们在$S$上的投影（图100），$l$上将$A,B,C$变为$A',B',C'$的射影变换，对应于$S$上的将$A_1,B_1,C_1$变为$A_1',B_1',C_1'$的射影变换。这两个射影变换的不动点，在从$l$到$S$的这个射影下相对应。由于我们已经知道如何找出圆的射影变换的不动点(参看前面的图98)，我们也就知道：直线$l$的射影变换的不动点就是从$S$同直线$UV$的交点到$O$的连线与$l$的交点，其中$U$是直线$A_1B_1'$和$A_1'B_1$的交点，$V$是直线$A_1C_1'$和$A_1'C_1$的交点（在这里我们假定$A$和$A'$不

同，从而 $A_1$ 和 $A_1'$ 不同；如果 $A',B',C'$ 和 $A,B,C$ 重合，则 $l$ 上所有的点都是不动点）．直线上的射影（除了恒同变换）可以有两个不动点，一个不动点，或沒有不动点．注意，不动点可以是无穷远点；当从 $O$ 到圆上的射影变换的不动点的连线与 $l$ 平行时，就出现这种情形。

注意，给定了圆 $S$，我们可以只用直尺找出直线的将点 $A,B,C$ 变成点 $A',B',C'$ 的射影变换的不动点。

86．设给定两条直线 $l_1$ 和 $l_2$，以及不在这些直线上的两个点 $A,B$。试找出 $l_1$ 上的点 $X$，使得在 $l_2$ 上由直线 $AX$ 和 $BX$ 所确定的线段有：

(a) 给定的长度 $a$；

(b) $l_2$ 上给定的点 $E$ 是它的中心。

可以将这个问题同问题82作比较。

87．给定两条直线 $l_1$ 和 $l_2$，以及 $l_1$ 上的点 $A$ 和 $l_2$ 上的点 $B$，并给定不在 $l_1$ 和 $l_2$ 上的一点 $P$．试作经过 $P$ 点并分别交 $l_1$ 和 $l_2$ 于点 $X$ 和 $Y$ 的直线，使得

(a) $AX/BY=m/n$，其中 $m/n$ 是给定的；

(b) $AX\cdot BY=k^2$，其中 $k$ 是给定的。

问题 87(a) 以另一种关系出现在《几何变换》第一册的问题45(b)中；还可参看《几何变换》第二册，第一章，§2中涉及该问题的注释。

88．在一平面上给定三条直线 $l_1,l_2,l_3$ 和一个点 $P$．试作经过 $P$ 点的直线，使得在这直线上由三条给定的直线所截得的两个线段相等。

89．给定两条直线 $l_1$ 和 $l_2$，以及不在这些直线上的一个点 $P$．试作经过 $P$ 点的两条直线，使得它们在 $l_1$ 和 $l_2$ 上截下的线段 $X_1Y_1$ 和 $X_2Y_2$ 有给定的长度：

$$X_1Y_1=a_1, X_2Y_2=a_2.$$

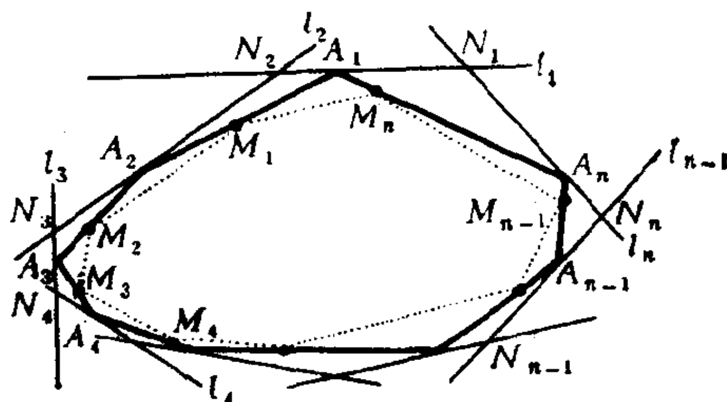



图 101

90．在一平面上给定 $n$ 条直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 和 $n$ 个点 $M_1$，$M_2, \cdots, M_n$（图101）．试作一个 $n$ 角形，它的顶点要在给定的直线上，并且它的边要经过给定的点（或者某些边经过给定的点，而其余的边沿着预先指定的方向）．

（这个问题也可以陈述如下：在一个给定的 $n$ 角形中要內接一个 $n$ 角形，它的边经过 $n$ 个给定的点（或者有些边经过给定的点而其余的边沿预先给定的方向）；或者还可以陈述为另一种形式：试作一个 $n$ 角形，它內接于一个给定的 $n$ 角形 $N_1N_2\cdots N_n$，并外接于另一个给定的 $n$ 角形 $M_1M_2\cdots M_n$．）

《几何变换》第二册中的问题9(b)和10(c)；本书§2中的问题24(a)—(c)，以及§4中的问题61都是问题90的特殊情形。

在这一节中的材料和只用直尺作图问题之间有密切的联系．通常的几何作图问题是用直尺和圆规作图。然而，如果我们限定只能用这两种工具中的一种作图，其结果是可解的

作图问题的范围并没有缩小很多；事实上，在下一章[1]的§2中将要证明：所有能够用直尺和圆规解决的作图问题，都能够只用圆规解决。在这里我们考虑只用直尺的作图。

容易看到，不是所有的直尺和圆规作图问题都能够只用直尺作出的。例如，我们将证明：只用直尺不可能作出经过给定点$P$，并且平行于给定直线$l$的直线。实际上，假若通过只包含画直线的作图可以确定这样的一条直线$m$，那末可以将平面$\pi$中的我们假设的图形（只由直线组成）射影到另一个平面$\pi'$上，使得平行线$l$，$m$变成相交直线$l'$，$m'$。这就表明，我们假设的确定直线$m$的作图，运用在$\pi'$上时（在这里以$l'$代替$l$）所确定的直线$m'$并不平行于$l'$。因而假设的作图不是总能给出与已知直线相平行的直线的。

可以证明，在初等几何中的所有作图问题，我们可以只要用到一次圆规便可作出。所需要的是用圆规作一个任意圆，此后在任何作图中不再需要用圆规。换句话说，**在平面上给定了一个有已知中心$O$的圆，我们可以用它并只用直尺解决任何直尺和圆规作图问题**。在本节中所剩下的问题，其目的就在于建立这个命题。

所有用直尺和圆规的作图问题，都可以归结为作某些直线和圆。每一条直线由该图形中的两个点确定，而每一个圆则由一个已知点（它的中心）和一个已知线段（它的半径）确定。在这些作图问题中所出现的点，或者是从开始时就给定的，或者是某些辅助线和辅助圆的交点。于是，每个直尺和圆规作图问题，都可以归结成下列基本作图问题的组合：

A． 经过给定的两个点作一条直线；

---

[1] 参看《几何变换》第四册。——英译者

B． 作一个已知其中心和半径的圆；

C． 确定两条给定直线的交点；

D． 确定给定的直线和圆的交点；

E． 确定两个给定圆的交点。

问题A和C可以只用直尺解决．至于问题B显然不能只用直尺解决；然而，给定了一个辅助圆，就可以只用直尺确定已知其中心和半径的圆上的任意多个点（参看下面的问题92；这是比较粗略的说法——即给定了一个辅助圆，可以只用直尺解决所有的直尺和圆规作图问题——的精确含意）．此外，借助于一个辅助圆，可以解决作图问题D和E（参看问题93和94）。总之，只用一个辅助圆和一根直尺，我们就可以解决所有直尺和圆规作图问题，条件是把画一个具有已知中心和半径的圆的工作理解为确定这个圆上的任意多个点。

在问题91—94中，假定我们已经给定了具有已知中心$O$的一个定圆$S$。所有的作图问题要求只用直尺解决。在解这些问题时，我们要用到一个事实，即一个点和一条直线关于一个已知圆的极线和极点，可以不用圆规作出来（参看§4第86页）。

91．(a) 经过给定点$P$试作一直线平行于给定的直线$l$．

(b) 试在给定的点$M$处作出平行且等于给定的线段$AB$的线段$MN$。

(c) 试从给定的点$P$作出到给定的直线$l$的垂线。

92．你能作出中心和半径都给定的圆上的任意多个点吗？

93．设圆$S$的中心$A$和半径$BC$都给定，试找出给定直

线 $l$ 与 $S$ 的交点。

94. 设给定了两个圆 $S_1$ 和 $S_2$ 的中心 $A_1$ 和 $A_2$，以及它们的半径 $B_1C_1$ 和 $B_2C_2$，试找出 $S_1$ 和 $S_2$ 的交点。

大家注意，如果以给定辅助圆 $S$ 上的一个任意小的弧 $MN$(和它的中心 $O$)来代替 $S$，我们仍然可以只用直尺解决所有的直尺和圆规作图问题。这是因为，只要给定了 $S$ 的一段弧 $MN$，直线 $l$ 同圆 $S$ 的交点可以只用直尺确定（参看§3中问题49和§4中问题55）。

给定辅助圆 $S$（或辅助弧 $MN$）的中心 $O$，这是不能缺少的条件。我们可以相当容易地证明，如果不给定 $S$ 的中心，则不用圆规就不能确定这个中心。证明这个结论所用的方法，和证明不能只用直尺作出与给定直线平行的直线的方法大致相同。假若有一种直尺作图法可以确定圆 $S$ 的中心，那末这个假想中所作出的图形只能是一组跟圆 $S$ 以某种方式相联系的直线，并且其中有两条直线交于 $S$ 的中心。将这个图形的平面 $\pi$ 射影到一个新的平面 $\pi'$ 上，使得 $S$ 变成圆 $S'$，而 $S$ 的中心 $O$ 则变成不是 $S'$ 的中心的一个点 $O'$，根据§3的结果（特别，参看§3定理1），这显然是能够做到的。在 $\pi'$ 上的图形，除了点 $O'$ 不是 $S'$ 的中心以外，完全类似于 $\pi$ 上的图形。这就证明了不能只用直尺作图来确定任意圆 $S$ 的中心。总之：如果不给定辅助圆 $S$ 的中心，我们就不能只用直尺解决所有的直尺和圆规作图问题（特别，用直尺和圆规可以确定 $S$ 的中心，但不能只用直尺确定这个中心）。

其次，即使我们给定平面上两个不相交的、其中心未知

的圆，这些中心也不能只用直尺确定出来① （除非知道这两个圆是同心的；参看下面的问题95(c))。可以证明，能够用直尺作图来确定两个相交或相切的圆的中心（参看问题95(a),(b))，或不属于同一束的三个任意圆的中心②。

95．在平面上给定两个圆 $S_1$ 和 $S_2$。试给出确定它们的中心的直尺作图法，如果这两个圆

(a) 交于两点；(b) 相切；(c) 同心。

现在我们能够来证明在§4中所讲的关于用平行直尺作图的定理3。实际上，由于可以只用平行直尺找出直线 $l$ 与圆 $S$ 的交点，这里 $S$ 的中心 $A$ 和半径 $a$ 都是已知的（参看§4问题56），我们能够断定：凡是在平面上给定其中心为已知的辅助圆的条件下，可以只用直尺解决的作图问题，即凡是可以用直尺和圆规作出的图都可以用平行直尺作出。

---

① 例如，参看H.拉德梅彻和O.托普利茨的《数学欣赏》（左平译，北京出版社，1981.——中译者）。

② 参看《几何变换》第四册，第二章，§3。

# 附　　录

## 罗巴切夫斯基-波里亚的非欧几里得几何（双曲几何）

在引论中我们曾经指出，每一个变换群都和一种几何相联系。这种几何专门研究几何图形在所说的群的变换下保持不变的那些性质。这样，在中学里所研究的经典的欧几里得几何就不是唯一可能的几何了；通过选取一个不同于运动群（或导致跟欧几里得几何密切相关的几何的相似变换群）的变换群，我们就有一种新的、“非欧几里得的”几何。这种“非欧几里得”几何的一个例子，就是射影几何，它研究图形在射影变换下保持不变的那种性质。射影几何不仅不是欧几里得几何；而且是“非常非欧几里得的”几何。例如，两点之间的距离不是一种射影性质，因为用射影变换可以将一个线段变成任意别的线段；换句话说，在射影几何中所有线段都是“全等的”。同样地，所有的角也都是“全等的”，所以通常的直线之间的夹角的概念，在射影几何中没有意义。还有，平面上任意两个四边形，在射影几何的意义下也都是“全等的”（这方面可以看§2的定理1）。所以谈论各种四边形（如象平行四边形、梯形等等）是没有意义的。再有，任意两个三角形都是“全等的”；事实上，可以用一个射影变换将三角形 $T_1$ 映射到另一个任意的三角形 $T_2$ 上，并使得在 $T_1$ 内部的一个给定的点变成在 $T_2$ 内部的一个任意给

定的点。这个事实消除了"三角形内部的异常点"(即三角形内部所有的点都是射影等价的)。

总之，我们可以说，在中学几何中那样重要的三角形和四边形的研究，在射影几何中没有任何意义，在射影几何中，对多边形的研究起始于五边形，我们可以把全体五边形作有意义的分类，并给出两个五边形"全等"的判据。

射影几何的所有这些不平常的特点，起因于这样的一个事实：射影变换的类远远大于运动的类（运动是非常特殊的射影变换）。因此，射影几何中的几何性质自然要比欧几里得几何中的少得多；在运动下不变的大部分性质在射影变换下不是不变的（例如，线段的长度，角的大小，是一个平行四边形这种性质，等等）。为了得到比射影几何有更多的不变性质的一种几何，我们必须选取射影变换类的一个子集；当然，这个子集应当构成一个变换群。选取由运动所构成的子集就得到欧几里得几何。然而，射影变换群的子群（即构成变换群的子集）有很多个，选择别的子群就会得到新的有趣的几何。

下面介绍选取射影变换群的一个子群的非常简单的方法，用这种方法得到的子群小得足以确定一种几何，这种几何具有比较丰富多彩的几何性质。考虑将平面上给定的一个圆盘 $K$ 变成自己的射影变换的全体。显然，这些变换构成一个变换群：如果有两个变换将圆盘 $K$ 变成自己，则它们的乘积也有这样的性质；变换群的其余的条件可以一样容易地验证。我们把这种变换称为**双曲运动**，并把研究图形在双曲运动下保持不变的性质的几何称为**双曲几何**。

乍看起来，可能会认为双曲运动群不是一种能够导致很好结果的变换群。我们已经看到，线段的长度概念之所以在

射影几何中失去意义，是由于射影变换群太大的缘故。现在的双曲运动群似乎又太小，也会带来困难。那就是由于没有一个双曲运动能将圆盘 $K$ 的点变成 $K$ 以外的点，可能会认为在这种几何中没有线段的长度的概念（因为不是所有的线段都可以比较）。为了排除这个困难，我们规定：**双曲几何的点是圆盘 $K$ 内部的点，双曲几何的直线是落在 $K$ 内部的线段**。这时，所有的点在我们的几何中都是等价的；容易看到，总有双曲运动将 $K$ 的一个内点 $A$ 变成 $K$ 的任意另一个内点 $A'$（参看§3中的定理1）。并且能够证明：假若 $AP$ 和 $A'P'$ 是两条射线（所谓起点是 $A$ 的射线，我们指的是介于点 $A$ 和 $K$ 的边界 $\Sigma$ 之间的直线段；参看图102），则存在一个双曲运动，将 $A$ 变成 $A'$，并将 $AP$ 变成 $A'P'$。为证明它，注意按§3的定理1，有一个双曲运动 $M_1$ 将 $A$ 变成圆盘 $K$ 的中心 $O$，并有一个双曲运动 $M_2$ 将 $A'$ 变成 $O$。射线 $AP$ 和 $A'P'$ 在 $M_1$ 和 $M_2$ 下的象分别用 $OQ$ 和 $OQ'$ 表示。以 $M_2^{-1}$ 表示 $M_2$ 的逆，它也是一个双曲运动（$M_2^{-1}$ 将射线 $OQ'$ 变成射线 $A'P'$，而它的存在性则可以从双曲运动的变换群的性质推出）。现在考虑由 $M_1$, $K$ 的转角为 $\angle QOQ'$ 的旋转 $\mathscr{R}$

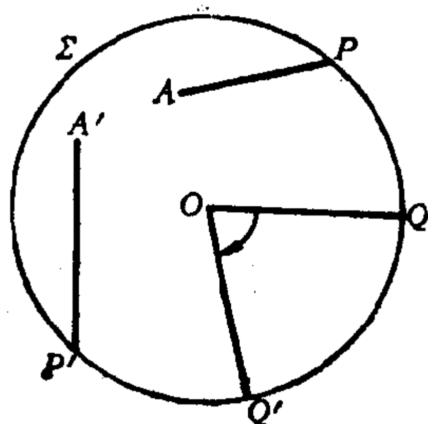


图 102

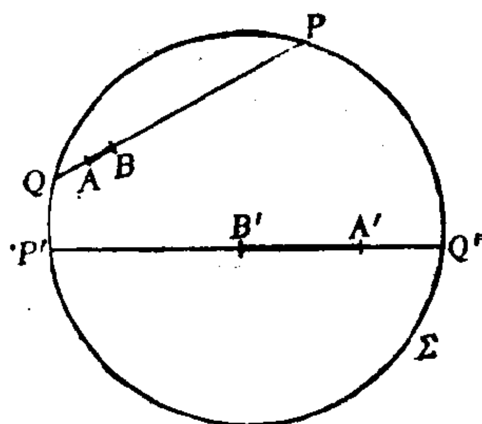


图 103

和 $M_2^{-1}$ 组成的一串双曲运动，其中的第一个将 $AP$ 变成 $OQ$，第二个将 $OQ$ 变成 $OQ'$，第三个将 $OQ'$ 变成 $A'P'$。这样，上述三个非欧几里得运动的乘积将 $AP$ 变成 $A'P'$，从而证明了我们的结论。

正如刚才我们所看到的，在双曲几何中每一个点可以变成任意其它的点，并且每条射线可以变成任意其它的射线。自然要问，是否能够将任意线段 $AB$ 变成任意别的线段 $A'B'$ 呢？可以证明这是不可能的。实际上，如果有一个双曲运动将线段 $AB$ 变成线段 $A'B'$（图103），它也就把通过 $A$ 和 $B$ 的整条双曲直线 $AB$ 变成双曲直线 $A'B'$；并且由于每个双曲运动都将圆盘 $\boldsymbol{K}$ 的边界 $\Sigma$ 变成它自身，$AB$ 同 $\Sigma$ 的交点 $P$ 和 $Q$ 将变成 $A'B'$ 同 $\Sigma$ 的交点 $P'$ 和 $Q'$。因而我们的双曲运动将把四个点 $A,B,P,Q$ 依次变为点 $A',B',P',Q'$。跟所有的射影变换一样，双曲运动保持四个点的交比不变（参看第43页），由此推出等式

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{A'P'/B'P'}{A'Q'/B'Q'},$$

若这个等式不成立，那就不存在将线段 $AB$ 变成线段 $A'B'$ 的双曲运动①。

这样，我们就证明了：如果线段 $AB$ 能够用双曲运动变成线段 $A'B'$，则有

① 这个等式的一个推论是：如果在（欧几里得）直线上的点的顺序为 $Q$，$A,B,P$ 和 $Q',A',B',P'$，则将线段 $AB$ 变成线段 $A'B'$ 的双曲运动，一定将 $P$ 变成 $P'$，$Q$ 变成 $Q'$（而不是 $P$ 变成 $Q'$ 和 $Q$ 变成 $P'$）。实际上，交比 $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ 和 $(A'P'/B'P')/(A'Q'/B'Q')$ 都大于 $1(AP/BP>1,\ AQ/BQ<1)$，而交比 $(A'Q'/B'Q')/(A'P'/B'P')$ 小于 $1(A'Q'/B'Q'<1, A'P'/B'P'>1)$；所以下列等式不成立

$$(AP/BP)/(AQ/BQ)=(A'Q'/B'Q')/(A'P'/B'P').$$

$$(*) \qquad \frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{A'P'/B'P'}{A'Q'/B'Q'}.$$

下面要证明，反过来，如果等式(*)成立，则存在将线段$AB$变成线段$A'B'$的双曲运动. 作双曲运动将$A$变成$A'$、射线$AP$变成射线$A'P'$(早先已经证明这种运动总是存在的)，这时$Q$变成$Q'$. 以$B_1$表示$B$的象，由于射影变换保持四个点的交比不变，应当有

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{A'P'/B_1P'}{A'Q'/B_1Q'}.$$

从这个等式和假定的等式(*)，我们得到

$$\frac{A'P'/B'P'}{A'Q'/B'Q'}=\frac{A'P'/B_1P'}{A'Q'/B_1Q'}.$$

从而可以断定$B_1$与$B'$重合，即上述双曲运动将线段$AB$变成线段$A'B'$，这就是所要的结论.

大家看到，**按照双曲几何的观点，两个线段$AB$和$A'B'$全等的充分必要条件是，交比$(AP/BP)/(AQ/BQ)$和$(A'P'/B'P')/(A'Q'/B'Q')$相等.** 在这个意义下，交比$(AP/BP)/(AQ/BQ)$刻划了线段$AB$的“双曲长度”. 然而，光是这个事实还不足以说明将交比$(AP/BP)/(AQ/BQ)$叫做线段$AB$的“双曲长度”是完全有道理的；在欧几里得几何中，长度的任何可逆函数（例如，长度的平方，或长度的立方根)，毕竟也能刻划全等的线段. 我们所惯用的附加条件是：如果点$C$分线段$AB$为两个小线段$AC$和$CB$[图104(a)]，则$AB$的长度是线段$AC$和$CB$的长度之和. 在这方面，用交比作为双曲长度的可能的测度是不能令人满意的；因为如果点$C$分线段$AB$为两个小线段$AC$和$CD$[图104(b)]，则

显然

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\left(\frac{AP/CP}{AQ/CQ}\right)\cdot\left(\frac{CP/BP}{CQ/BQ}\right),$$

即交比$(AP/BP)/(AQ/BQ)$是交比$(AP/CP)/(AQ/CQ)$和$(CP/BP)/(CQ/BQ)$之积而不是和。然而，由于乘积的对数

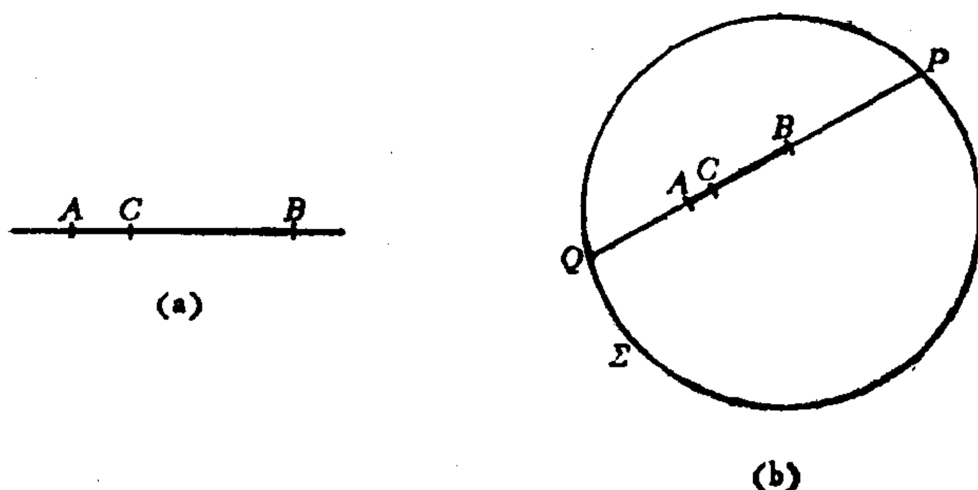



图 104

是其因子的对数之和，有[①]

$$\log\left(\frac{AP/BP}{AQ/BQ}\right)=\log\left(\frac{AP/CP}{AQ/CQ}\right)+\log\left(\frac{CP/BP}{CQ/BQ}\right).$$

这就提示我们把

$$(**)\qquad \log\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=d_{AB}$$

定义为线段$AB$的双曲长度，其中$P$和$Q$总表示直线$AB$同圆$\Sigma$的交点；因为在这时有

---

① 注意，我们对直线$AB$上有关的点的顺序的要求（参看第132页上的脚注），保证了交比$(AP/BP)/(AQ/BQ)$大于1，因此它的对数是正的。对于另外两个交比，类似的注释也成立。

$$d_{AB}=d_{AC}+d_{CB}.$$

这个可加性，以及在上面所说的几何意义下线段 $AB$ 与线段 $A'B'$ 全等的充分必要条件是 $d_{AB}=d_{A'B'}$，这两者说明我们把(＊＊)定义的数 $d_{AB}$ 称为线段 $AB$ 的双曲长度是有道理的①。

大家注意，如果点 $B$ 沿着直线 $AP$ 向 $P$ 点无限接近，则交比 $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ 无限地增加 $(BP\to 0)$；因此，线段 $AB$ 的双曲长度 $d_{AB}$ 无限地增加。这说明射线 $AP$ 的双曲长度是无穷大(尽管整个双曲直线是用一个其欧几里得长度为有限的线段表示的)。

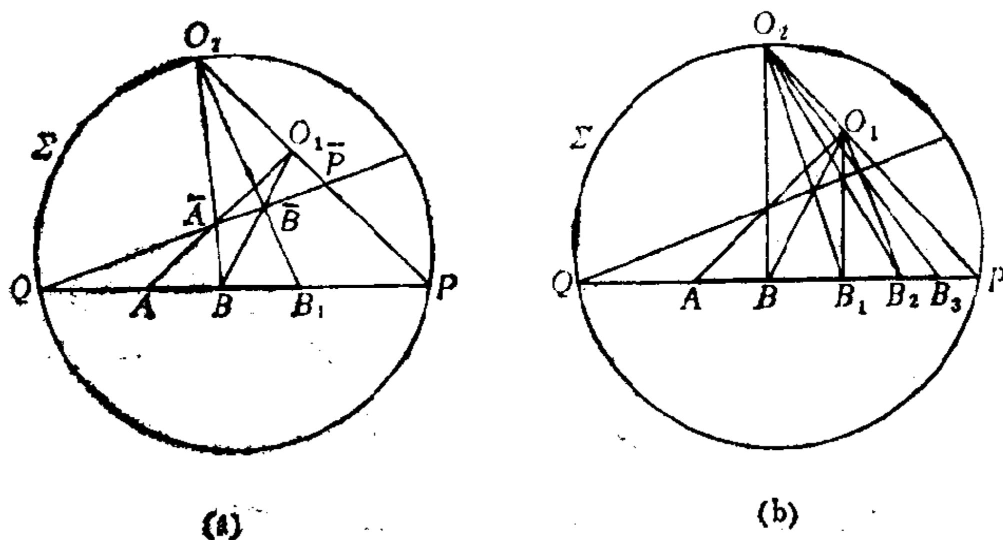



图 105

双曲直线是无限长的这一事实也可以不用交比来证明。有关的构思示意在图105中；图105(a)表示如何将双曲直线

---

① 我们可以同样令人满意地用数 $k\log[(AP/BP)/(AQ/BQ)]$ 来定义线段 $AB$ 的双曲长度，其中 $k$ 是一个任意的正的常数。选择一个特殊的 $k$ 相当于在双曲几何中选择一个特殊的长度单位。这个注释说明，在公式(＊＊)中对数的底的选择没有多大关系，因为对数的底的改变等价于用同一个常数乘所有的“长度” $d_{AB}$。

$AP$ 上的线段 $AB$ 的长度加倍；而图105(b)则表示在射线 $AP$(从 $A$ 点出发）上接连地截取等于线段 $AB$ 的线段的过程，可以无限地进行下去而总是不能达到 $P$ 点。我们现在来说明表示在图105(a)中的"加倍作图"的细节。由于四个点 $A,B,P,Q$ 和四个点 $\bar{A},\bar{B},\bar{P},Q$ 是从 $O_1$ 透视的，交比 $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ 和 $(\bar{A}\bar{P}/\bar{B}\bar{P})/(\bar{A}Q/\bar{B}Q)$ 相等，又因四个点 $\bar{A},\bar{B},\bar{P},Q$ 和四个点 $B,B_1,P,Q$ 是从 $O_2$ 透视的，所以交比 $(\bar{A}\bar{P}/\bar{B}\bar{P})/(\bar{A}Q/\bar{B}Q)$ 和 $(BP/B_1P)/(BQ/B_1Q)$ 相等。因此

$$\frac{AP/BP}{AQ/BQ}=\frac{BP/B_1P}{BQ/B_1Q},$$

或等价地有

$$d_{AB}=d_{BB_1}.$$

这就推出线段 $AB$ 和 $BB_1$ 全等(在双曲几何的意义下)。图105(b)不过是图105(a)中描述的作图方法的简单应用：先用于 $AB$(给出 $BB_1$)，再用于 $BB_1$(给出 $B_1B_2$)，等等。

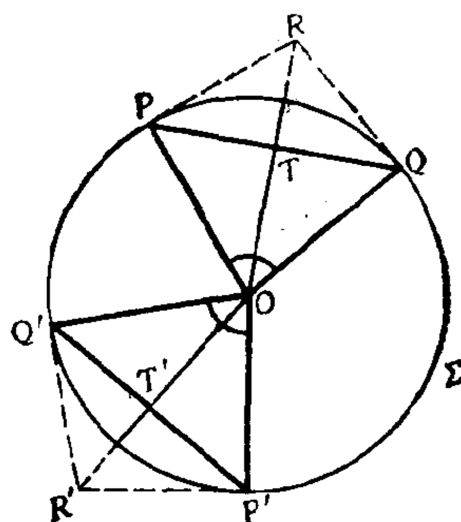


图 106

下面，我们来研究双曲几何中直线之间的夹角问题。先考虑从圆盘 $K$ 的中心 $O$ 出发的两对射线 $OP$ 和 $OQ$，$OP'$ 和 $OQ'$。显然，如果通常的(欧几里得的)角 $POQ$ 和角 $P'OQ'$ 相等(图106)，则存在一个将角 $POQ$ 变成角 $P'OQ'$ 的双曲运动：这个运动就是绕中心 $O$ 的旋转（绕 $O$ 的旋

转是双曲运动，因为它是将圆盘 $K$ 变成自身的射影变换[①])。我们要证明，反过来，如果有一个双曲运动将角 $POQ$ 变成角 $P'OQ'$，则(通常的，即欧几里得的)角 $POQ$ 和角 $P'OQ'$ 全等。实际上，平面的这种将 $K$ 变到它自身上的射影变换，将点 $P$ 和 $Q$ 变成点 $P'$ 和 $Q'$，从而直线 $PQ$ 变成直线 $P'Q'$；它还将圆 $\Sigma$ 在点 $P$ 和 $Q$ 处的切线 $PR$ 和 $QR$ 变成在点 $P'$ 和 $Q'$ 处的切线 $P'R'$ 和 $Q'R'$(因为每个双曲运动将 $\Sigma$ 变成它自身，并将 $\Sigma$ 的切线变成 $\Sigma$ 的切线；参看第 74 页)。此外，它将直线 $OR$ 变成直线 $OR'$，并将 $PQ$ 和 $OR$ 的交点 $T$ 变成 $P'Q'$ 和 $OR'$ 的交点 $T'$(图106)。因此上述双曲运动将线段 $OT$ 变成线段 $OT'$，它说明这两个线段在双曲几何的意义下是全等的。但是从这可以推出它们在欧几里得意义下也是全等的；因为，譬如说，如果线段 $OT$ 小于线段 $OT'$，则我们可以用绕 $O$ 点的旋转(它是双曲运动)将线段 $OT$ 变成线段 $OT'$ 的一部分，而这表明线段 $OT$ 和 $OT'$ 的双曲长度是不同的，跟已经证明的它们是双曲全等的相矛盾。又从等式 $OT=OT'$ 可以推出 $\angle POQ=\angle P'OQ'$，因为 $OT=r\cos\frac{1}{2}\angle POQ$，$OT'=r\cos\frac{1}{2}\angle P'OQ'$，其中 $r$ 是圆盘 $K$ 的半径。

就象我们看到的，和交比 $(AP/BP)/(AQ/BQ)$ 刻划线段 $AB$ 的双曲长度大致类似，角 $POQ$ 的大小刻划 $OP$ 和 $OQ$ 之间的“双曲角”。而且，如果射线 $OU$ 把角 $POQ$(在内部)分成角 $POU$ 和角 $UOQ$，则 $\angle POQ=\angle POU+\angle UOQ$(两角

---

① 通过双曲运动可以将角 $POQ$ 和角 $P'OQ'$(假定在欧几里得意义下相等)叠合起来，而且使得 $OP$ 跟 $OP'$ 叠合，$OQ$ 跟 $OQ'$ 叠合(而不是 $OP$ 跟 $OQ'$ 叠合，$OQ$ 跟 $OP'$ 叠合)。为此，我们只要将圆盘 $K$ 绕中心 $O$ 旋转角度 $POP'$，如果需要的话再将 $K$ 对直径 $OP$ 作一个反射(对 $K$ 的直径的反射是双曲运动)。

之和的大小等于它们的大小之和)。这样，我们说明了把从圆盘 $\boldsymbol{K}$ 的中心 $O$ 点出发的两条射线 $OP$ 和 $OQ$ 之间的双曲角的大小 $\delta_{POQ}$，定义为角 $POQ$ 在欧几里得意义下的大小是合理的。

其次，考虑顶点在圆盘 $\boldsymbol{K}$ 的任意一点 $A$ 处的角 $PAQ$ (图107)。用双曲运动将 $A$ 变成 $\boldsymbol{K}$ 的中心 $O$，以角 $P'OQ'$ 表示角 $PAQ$ 的象。当然，这种运动有许多种选择方法(参看第131页)；然而，如果 $M_1$ 和 $M_2$ 是两个运动，将角 $PAQ$ 分别变为两个不同的中心角 $P'OQ'$ 和 $P_1OQ_1$，则 $M_1$ 的逆 $M_1^{-1}$ 将角 $P'OQ'$ 变成角 $PAQ$，于是双曲运动 $M_1^{-1}$ 和 $M_2$ 的乘积将角 $P'OQ'$ 变成角 $P_1OQ_1$。这说明在双曲几何意义下角 $P'OQ'$ 和角 $P_1OQ_1$ 是全等的，所以在通常的(欧几里得的)意义下也是全等的。因此，我们可以把两条射线 $AP$ 和 $AQ$ 之间的双曲角的大小 $\delta_{PAQ}$，定义为圆盘 $\boldsymbol{K}$ 的角 $P'OQ'$ 在欧几里得几何意义下的大小，其中角 $P'OQ'$ 是由角 $PAQ$ 在双曲运动下变成的任意一个中心角。显然，角的这个非欧几里得量度，具有角的通常的欧几里得量度的基本性质；这就是说，当且仅当有一个双曲运动将一个角变成另一个角时，这两个角相等；以及如果射线 $AR$ 内分角 $PAQ$ 为角 $PAR$ 和角 $RAQ$，则 $\delta_{PAQ}=\delta_{PAR}+\delta_{RAQ}$。

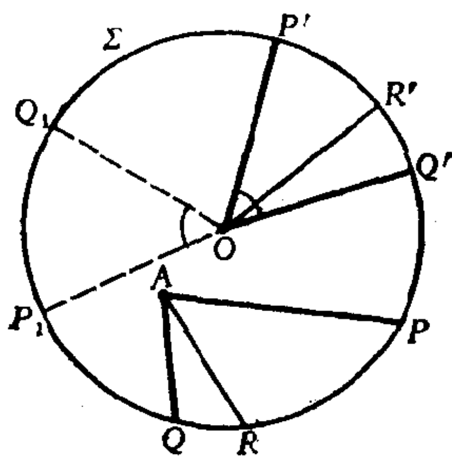


图 107

由于双曲运动将直线变成直线，因而在任意点 $A$ 处的平角的大小和在 $O$ 点处的平角的大小是一致的，即和平角在欧

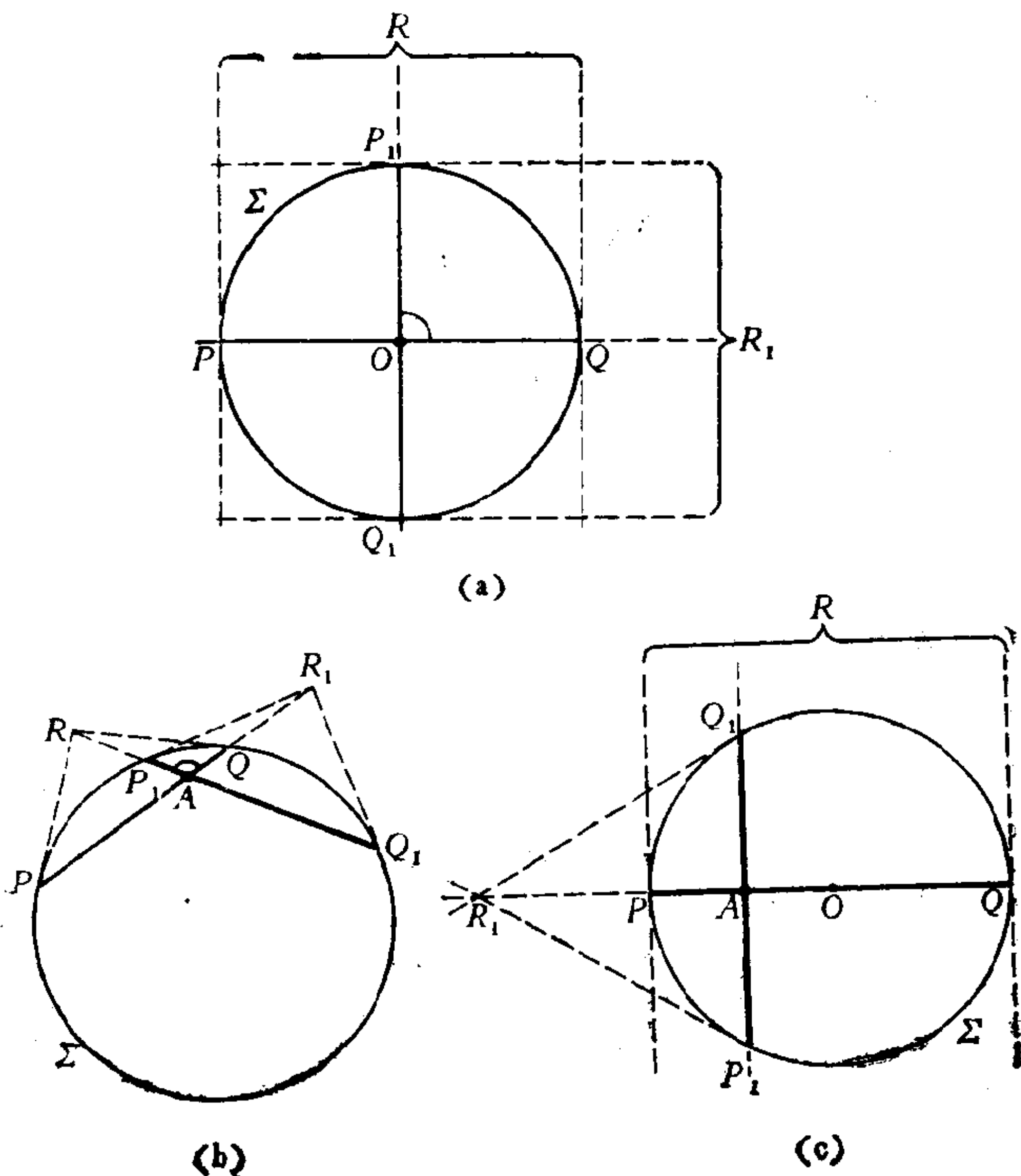



图 108

几里得几何意义下的大小是一致的；换句话说，在双曲几何中和在欧几里得几何中一样，一个平角等于180°．其次，跟在欧几里得几何中一样，在双曲几何中一个周角总等于两个平角，即360°．一个直角，即与它的补角全等的角，等于半个平角，即90°．然而，在双曲几何中两条垂直（即构成一个直角）的两条直线，一般地说，在通常（欧几里得的）意义下不一定是垂直的．在何时两条双曲直线 $PQ$ 和 $P_1Q_1$ 在双曲几

何意义下垂直的问题，将在下面研究。

如果两条交于$K$的中心$O$的直线$PQ$和$P_1Q_1$在双曲几何的意义下垂直，则它们必定在通常(欧几里得的)意义下垂直。因此，在这时圆$\Sigma$于$P$和$Q$处的切线必平行于直线$P_1Q_1$[图108(a)]；用射影的话来说，这两条切线和直线$P_1Q_1$必定都通过射影平面上的同一个无穷远点。在将$O$点变成$A$点的双曲运动下，图108(a)中的图形将变成图108(b)中的图形，而在将$A$变成$O$的逆变换下，图108(b)中的图形又变成图108(a)中的图形。由此，**两条双曲直线$PQ$和$P_1Q_1$垂直的充分必要条件是，直线$P_1Q_1$超出圆盘$K$的延长线经过$\Sigma$在$P$和$Q$点处的切线的交点**[图108(b)]①。特别地，如果直线$PQ$是$K$的直径[图108(c)]，则$\Sigma$在$P$和$Q$点处的切线彼此平行，并且垂直于(在欧几里得意义下)该直径。由此，在非欧几里得意义下垂直于直径$PQ$的直线$P_1Q_1$，在欧几里得意义下同样垂直于$PQ$(不管直线$P_1Q_1$是否经过$K$的中心)。显然，**在双曲几何中从一点$B$到一直线$PQ$有唯一的垂线**；要作出这条垂线，只需作$\Sigma$在点$P$和$Q$处的切线的交点到$B$点的连线。这条垂线的垂足自然称为点$B$在直线$PQ$上的投影。如果$B$就在$PQ$上，则上述构图说明如何在给定直线上的一个给定点处作该直线的垂线。

下面我们来说明在双曲几何中如何平分一个角。假若这个角是中心角，则在通常(欧几里得的)意义下平分这个角的直线$OU$[图109(a)]，即它超出圆盘$K$的延长线经过$\Sigma$在$P$

---

① 换句话说，直线$P_1Q_1$垂直于直线$PQ$，如果它的超出圆盘$K$的延长线经过直线$PQ$关于圆$\Sigma$的极点(参看§4)；假若适合这个条件，则根据§4的定理2，直线$PQ$的延长线同样要经过直线$P_1Q_1$关于$\Sigma$的极点，即经过$\Sigma$在$P_1$和$Q_1$处的切线的交点。由此可见，在双曲几何中(如同在欧几里得几何中那样)直线的垂直关系是对称的：如果$P_1Q_1\perp PQ$，则$PQ\perp P_1Q_1$(还可参看图108(a))。

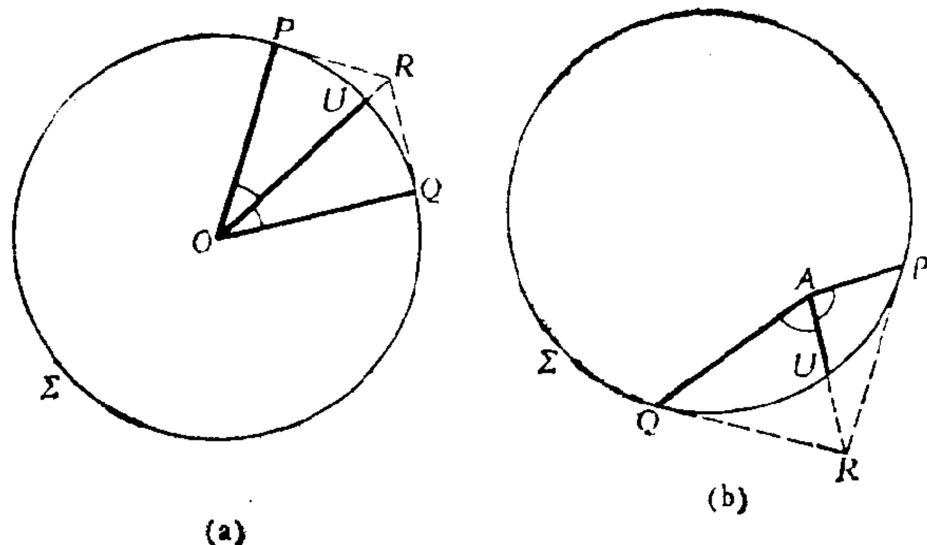
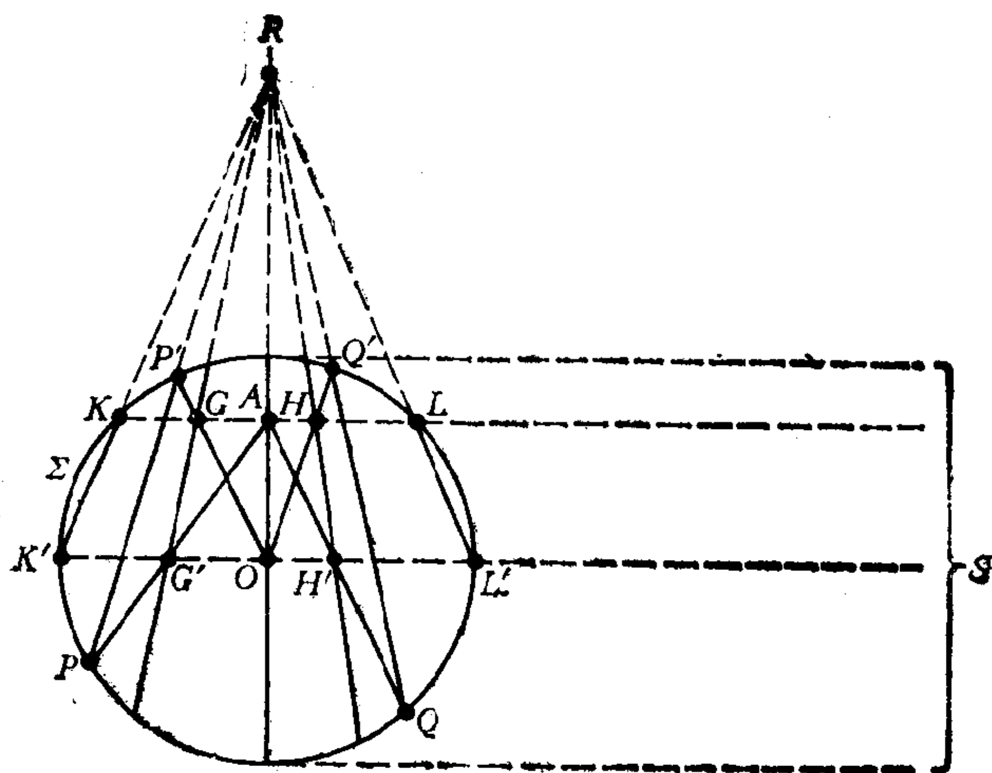



图 109

和$Q$处的切线的交点$R$的直线，在非欧几里得意义下也平分这个角。由此推出，直线$AU$平分非欧几里得角$PAQ$(顶点$A$是双曲平面上任意一点)的充分必要条件是，$AU$超出圆盘$\boldsymbol{K}$的延长线经过$\Sigma$在$P$和$Q$点处的切线的交点$R$[图 109(b)]①。

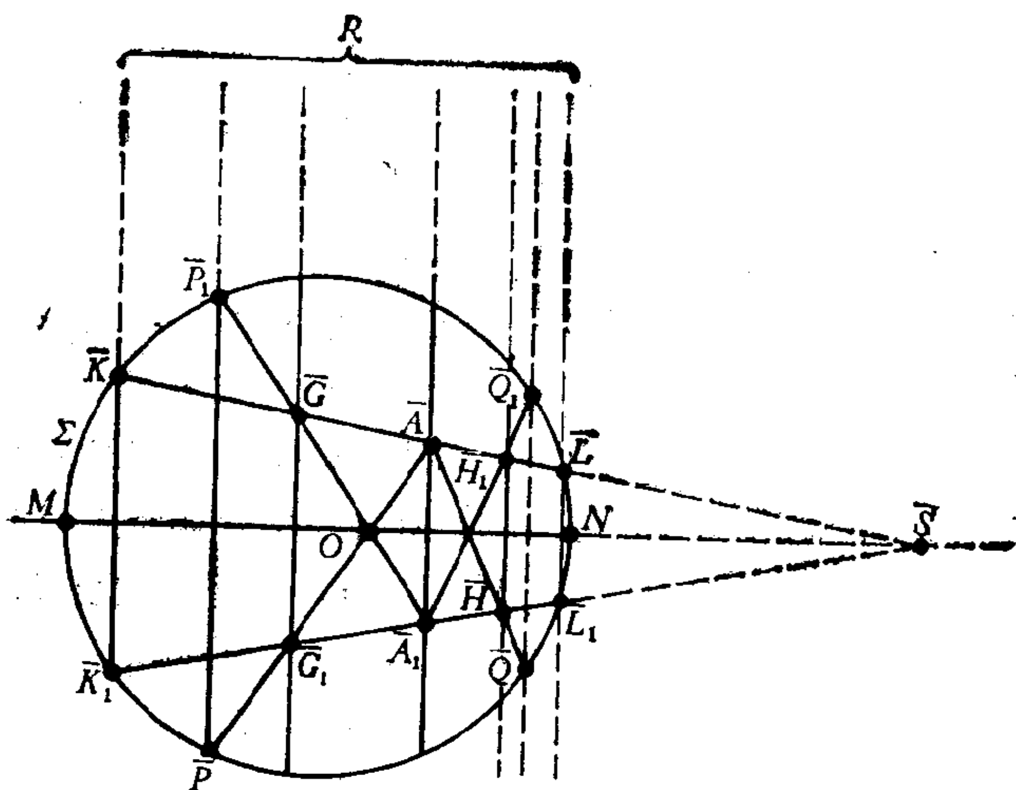
作圆盘$\boldsymbol{K}$的与给定的角$PAQ$全等的中心角$P'OQ'$，有一个简单的方法(图 110(a)；在这里的全部讨论中，线段和角的全等都是在双曲几何的意义下讲的)。考虑两个角$\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$和$\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$[图110(b)]，它们对于圆盘$\boldsymbol{K}$的直径$MN$对称(在通常意义下)，并且使得角$\bar{A}_1\bar{A}\bar{P}$和$\bar{A}_1\bar{A}\bar{Q}$分别与角$OAP$和$OAQ$全等(从而角$\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$和$PAQ$全等)，还使得距离$d_{\bar{A}\bar{A}_1}$等于距离$d_{AO}$。则角$\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$和角$\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$一定全等，因为通过一个双曲运动，即关于直径$MN$的反射，可以使得它们互相

① 即$AU$的延长线经过直线$PQ$关于圆$\Sigma$的极点(参看第140页上的注)。特别地，如果角$PAQ$是一个平角，则我们已经看到，角平分线的作图和直线$PQ$在其上一点$A$处引垂线的作图是一样的。



R
P′
Q′
K
G
A
H
L
Σ
K′
G′
O
H′
L′
P
Q
S


(a)



R
$\bar{P}_1$
$\bar{K}$
$\bar{G}$
$\bar{A}$
$\bar{Q}_1$
$\bar{H}_1$
$\bar{L}$
Σ
M
O
N
$\bar{S}$
$\bar{H}$
$L_1$
$\bar{K}_1$
$\bar{G}_1$
$\bar{A}_1$
$\bar{Q}$
$\bar{P}$


(b)

图 110

变换。将线段$\bar{A}\bar{A}_1$变成线段$AO$的双曲运动，将角$\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$变成角$PAQ$(这就是为什么我们要求角$\bar{A}_1\bar{A}\bar{P}$和$OAP$全等、角$\bar{A}_1\bar{A}\bar{Q}$和$OAQ$全等的道理)，并且将角$\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$变成和角$PAQ$全等的中心角$P'OQ'$(双曲运动将全等的角变成全等的角)。我们的问题是要说明，给定了角$PAQ$，如何作角$P'OQ'$。

为确定起见，假设角$PAO$和$QAO$都是锐角。在点$A$和$O$作$AO$的双曲垂线$KL$和$K'L'$(由于$AO$是直径，$KL$和$K'L'$也是$AO$的欧几里得垂线；参看图108(c))，如图110(a)，以$G,H$和$G',H'$分别表示角$P'OQ'$和$PAQ$的边与直线$KL$和$K'L'$的交点。类似地，在点$\bar{A}$和$\bar{A}_1$作$\bar{A}\bar{A}_1$的双曲垂线$\bar{K}\bar{L}$和$\bar{K}_1\bar{L}_1$，并如图110(b)，以$\bar{G},\bar{H}$和$\bar{G}_1,\bar{H}_1$分别表示角$\bar{P}_1\bar{A}_1\bar{Q}_1$和$\bar{P}\bar{A}\bar{Q}$的边同直线$\bar{K}\bar{L}$和$\bar{K}_1\bar{L}_1$的交点。显然，从图110(b)可以看出，欧几里得直线$\bar{K}\bar{K}_1,\bar{L}\bar{L}_1,\bar{G}\bar{G}_1,\bar{H}\bar{H}_1$(和$\bar{A}\bar{A}_1$)交于同一个无穷远点$\bar{R}$。由于在图110(a)中的图形是从图110(b)中的图形作一个双曲运动得到的，直线$KK',LL',GG',HH'$(和$AO$)都交于同一个点$R$。

这就表明可以如何作出角$P'OQ'$，那就是说，为了用一个双曲运动将角$PAQ$的顶点$A$变成圆盘$K$的中心$O$，在点$A$和$O$作直径$AO$的(通常的)垂线$KL$和$K'L'$($K,L$和$K',L'$是这两条垂线同圆$\Sigma$的交点，$K$和$K'$在$OA$的同侧)，从$AP$和$AQ$分别与$K'L'$的交点$G'$和$H'$到直线$KK'$和$LL'$的交点$R$(在$K$外)作连线。设$G$和$H$分别表示直线$RG'$和$RH'$同直线$KL$的交点；则$\delta_{G'AH'}=\delta_{GOH}$①。至此，由于$\delta_{GOH}=\angle GOH$(其中$\delta_{GOH}$表示$OG$和$OH$之间的角的双曲

① 也可以作点$P$和$Q$到$R$的连线，在这时直线$RP$和$RQ$同圆$\Sigma$交于点$P'$和$Q'$(参看图110(a),(b))。

度量。而$\angle GOH$则是这个角的欧几里得度量)，从而最后我们得到

$$\delta_{PAQ}=\angle GOH.$$

大家还可以注意从图110(a)可以推出的一个事实，即如果$A\neq O$，则

$$\delta_{PAQ}=\angle GOH<\angle PAQ$$

（因为$AG<OG'$，$AH<OH'$，所以$\angle GOA<\angle G'AO$，$\angle HOA<\angle H'AO$)。

在这里还有交于双曲平面中点$A$的直线$PP_1$和$QQ_1$之间的双曲角的另一个（更简单的)作图[图110(c)]：设$t$和$t_1$是圆$\Sigma$在弦$PP_1$的端点$P$,$P_1$处的切线，它们交于点$U$。又设$s_1$是中心在$U$半径为$UP=UP_1$的圆在$K$中的弧(如果$t\parallel t_1$，则$K$的弦$PP_1$起弧$s_1$的作用)。类似地，设$s_2$是以$\Sigma$的切线$QV$和$Q_1V$的交点$V$为中心，$VQ=VQ_1$为半径的圆在$K$中的弧。则弧$s_1$和$s_2$之间的通常的(欧几里得的)角（即这两条弧在其交点处的切线所夹的角，图110(c))等于双曲角$PAQ$。这一事实的证明，在双曲几何的所谓“庞加莱(Poincaré)模型”的背景下最容易给出来，我们将在第二

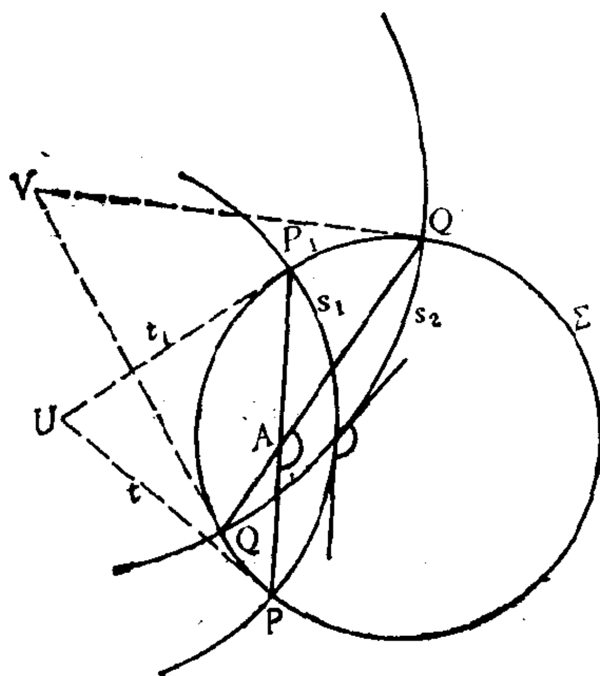



图 110(c)

章① 中给出这个证明。

现在我们来把罗巴切夫斯基-波里亚的非欧几里得几何与中学里学习的欧几里得几何作一个比较。首先想到的一个问题是这两种几何有多少共同之处。在这两种几何中，两个点确定唯一的直线，两条直线至多有一个公共点(它可以由双曲几何中的直线是平面中的线段这一事实推出)。其次，在这两种几何中，可以通过运动将一个点和从这个点出发的一条射线变成任意一点和从此点出发的一条任意指定的射线。线段的双曲长度和角的双曲大小跟欧几里得几何中与之相应的概念有许多共同的性质；例如，在两种几何中，两个线段之和的长度等于它们的长度之和，两角之和的量度等于它们的量度之和。

如同在普通的欧几里得几何中一样，在双曲几何中，在直线上的一个给定点和沿两个方向中的随便哪一个方向，可以作任意长的一个线段(在这里要用到一个重要事实，即双曲直线是无限的；参看第135页)；类似地，在直线上的一个给定点并在该直线的随便哪一侧，可以作出一个给定的角。这说明，在中学几何中所有那些熟悉的、其证明以欧几里得几何中刚才提到的那些简单的命题(公理)为基础的定理，在双曲几何中无需作任何修改全都成立。例如，在双曲几何中，关于补角和对顶角的定理(以及对顶角的平分角线在同一直线上，补角的平分角线互相垂直等定理)；关于三角形全等的所有判别法(包括直角三角形全等的判别法)；关于等腰三角形的性质的定理；关于线段的垂直平分线和角平分线的性质的定理；关于三角形的角平分线共点的定理等等，全都仍然成立。从关于三角形全等的判别法，用通常的方法可以推出关于三角形的一个外角的定理(这个外角大于不相邻的每

① 参看《几何变换》第四册。——英译者

一个内角)，并且从这个定理又可推出三角形的边和角之间的关系，以及关于三角形任意一边的长度小于另外两边的长度之和的定理．从这些结果我们可以推出关于从一点到一直线的垂直线段和斜线段的相对长度的定理(它说明将点到直线的距离定义为从该点到所说的直线的垂直线段的长度是合理的)，以及关于一个线段比连接它的端点的任何其它折线要短的定理．如果我们把曲线的长度定义为它的内接折线的长度的极限，则与在欧几里得几何中的情形一样，在双曲几何中也可以断定：连接两个定点的曲线中长度最小的就是以这两点为端点的直线段．这就使得我们可以将两点之间的距离定义为连接它们的直线段的长度．所有这些命题强调了这两种几何的相似性．

作为例子，我们来证明刚提到的那些定理中的两个定理．

在双曲几何中关于三角形全等的第一个判别法的证明．设 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 是两个三角形，并且 $d_{AC}=d_{A_1C_1}$，$d_{AB}=d_{A_1B_1}$，$\delta_{BAC}=\delta_{B_1A_1C_1}$．问题是要证明这两个三角形全等(图111)．用双曲运动将点 $A$ 变成点 $A_1$，并使得边 $AC$ 的象和 $A_1C_1$ 在一条射线上．由于 $d_{AC}=d_{A_1C_1}$，点 $C$ 和 $C_1$ 重合，又由于角 $A$ 和角 $A_1$ 全等，边 $AB$ 的象和 $A_1B_1$ 在一条射线上；根据 $d_{AB}=d_{A_1B_1}$，点 $B$ 和 $B_1$ 重合．所以边 $CB$ 和 $C_1B_1$ 重合(两点确定唯一的直线)；从而这两个三角形重合，因此原来的两个三角形全等[1]．这个证明跟基谢廖夫的教科

---

① 将 $A$ 变成 $A_1$，并将射线 $AC$ 变成射线 $A_1C_1$ 的非欧几里得运动，可以用第131页中说明的或下面的方法实现：先作运动 $M_1$ 将 $A$ 变成 $O$，然后作绕 $O$ 点的旋转 $\mathscr{R}$，有时可能还要作圆盘 $\mathbf{K}$ 对直径 $OQ'$ 的反射 $\mathscr{S}$，其中 $OQ'$ 是射线 $AC$ 在前两个运动下的象，其后再作将 $O$ 变成 $A_1$ 的运动 $M_2^{-1}$．如果 $\delta_{BAC}=\delta_{B_1A_1C_1}$，则将射线 $AC$ 变成射线 $A_1C_1$ 的这两个双曲运动中，其中有一个必定将射线 $AB$ 变成射线 $A_1B_1$．

书① 中关于三角形全等的第一个判别法的证明字句全是一样的；虽然在这里的图形和那里完全不同。

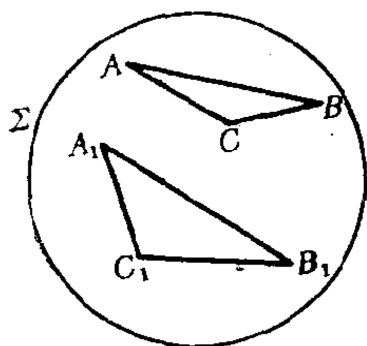



图 111

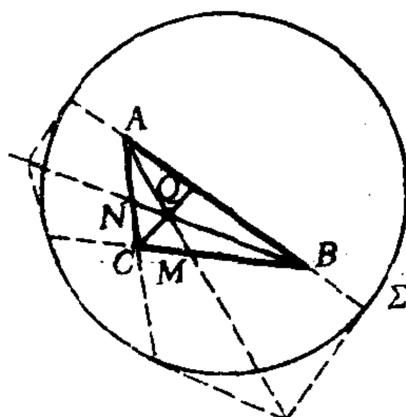



图 112

定理“**三角形的角平分线交于一点**”的证明。前面已经提到，关于角平分线上的点到角的两边距离相等的定理及其逆定理，在双曲几何中也成立（试证明之！）。现在考虑$\triangle ABC$的角$A$和角$B$的平分线$AM$和$BN$(图 112)。显然，这两条角平分线交于三角形的一个内点$Q$。由于$Q$是$AM$和$BN$的公共点，它到边$BA$和$BC$以及到边$AB$和$AC$都等距，所以到边$AC$和$BC$也等距；从而$Q$是角$C$的平分线上的一点，这就证明了我们所作的结论。这个证明实质上也是基谢廖夫的教科书② 中的证明的重复。我们建议读者补充上面提到的各个定理的证明。

大家注意，双曲几何的每个定理都可叙述为欧几里得几何的关于圆盘$K$的弦和点的定理。例如，双曲几何的定理：**角平分线是到角的两边等距离的点的轨迹**，有如下“欧几里得”的意义。设$PR,QS$, $MN$是圆$\Sigma$的经过一点$A$的三条

① 见第 2 页中注。——英译者

② 看第 2 页的注。——英译者

弦，并设 $MN$ 的延长线经过 $\Sigma$ 在 $P$ 和 $Q$ 的切线的交点($MN$ 是角 $PAQ$ 的“双曲角平分线”；参看图113)。

命 $K$ 是弦 $MN$ 上的一个点。设 $T_1T_2$ 分别是 $\Sigma$ 在点 $P$ 和 $R$，$Q$ 和 $S$ 处的切线的交点，从点 $T_1$ 和 $T_2$ 分别作到 $K$ 的连线(即从 $K$ 到直线 $PR$ 和 $QS$ 作“双曲垂线”)。命 $U_1V_1$ 是直线 $T_1K$ 上的弦，$C$ 是它同 $PR$ 的交点。类似地，命 $U_2V_2$ 是直线 $T_2K$ 上的弦，$D$ 是它同 $QS$ 的交点。则四个点 $K$，$C$；$U_1$，$V_1$ 的交比等于四个点 $K$，$D$；$V_2$，$U_2$ 的交比。

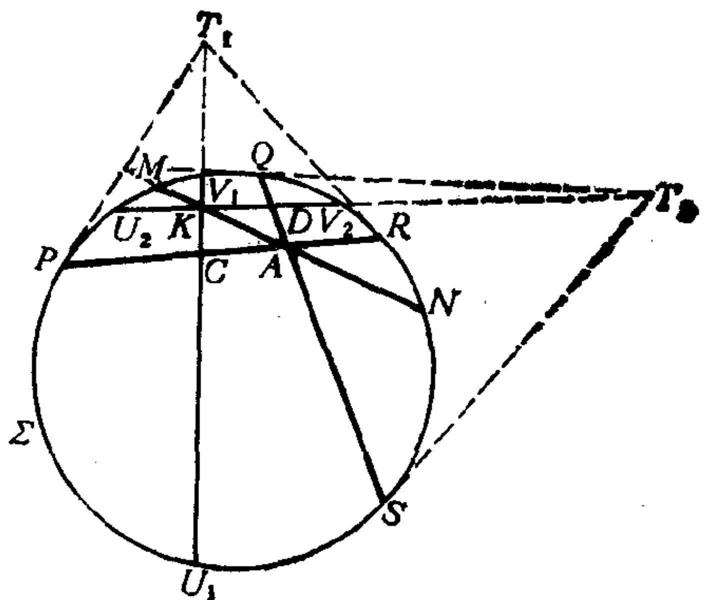


图 113

双曲几何和欧几里得几何之间的这种联系，一方面使得我们可以把双曲几何的任意一个定理的证明归结为包含圆盘 $K$ 的点和弦的某一个定理的证明，即它向我们提供了用欧几里得几何的术语详细研究双曲几何的一种普遍的方法(参看问题99及问题100—112)。另一方面，双曲几何中一个定理的证明自动给出欧几里得几何的相应定理的一个证明。刚才讨论的例子就是一个很好的说明，证明了双曲几何中关于角平分线的定理成立，就意味着证明了等式

$$\frac{KU_1/CU_1}{KV_1/CV_1}=\frac{KV_2/DV_2}{KU_2/DU_2}$$

(看图113)。要直接证明它却是相当复杂的。用双曲几何来证明欧几里得几何的定理的这种方法，有时可以产生有趣的结果。

96．试证明：双曲几何的定理“对顶角的平分线在一条直线上”，等价于§3问题40(a)的欧几里得几何的定理。

97．与双曲几何的定理“补角的平分线正交”等价的欧几里得几何的定理是什么？

98．试证明：双曲几何的定理“三角形的角平分线共点”等价于欧几里得几何中的勃良松定理(参看§3问题47)。

99．试用关于线段的双曲长度的表达式直接证明：在双曲几何中三角形任意一边的长度总小于其它两边的长度之和。

直到现在，我们强调了通常的(欧几里得的)几何和双曲几何的相似性；下面我们要来指出它们的显著差别。首先考虑所谓的**平行公理**在双曲几何中的状况，这个公理是：

如果$a$是一条直线，$A$是不在$a$上的一个点，则恰有一条直线经过$A$并且和$a$不相交。

这条公理包含两个结论：经过$A$点的这条直线的*存在性*(这一点在双曲几何中仍然成立)和它的**唯一性**。平行公理的唯一性部分在双曲几何中不成立。事实上，在双曲几何中我们说两条直线$PQ$和$RS$相交，是指它们交于圆盘$\boldsymbol{K}$内的一点(图114)，因为在$\boldsymbol{K}$外部的点和在它边界上的点(圆$\Sigma$上的点)都不能看成双曲平面的点。由此可以推出，经过不在直线$PQ$上的一个点$A$，可以作无穷多条不和$PQ$相交的直线

(如图 114 中的直线$MN$)。因而**在双曲几何中平行公理不成立**。这说明：中学几何中的、其证明要用到平行公理的所有定理(从而是中学几何中的多数定理)，看成双曲几何中的定理时可能成立(参看问题 102,103,104)、也可能不成立(例如，参看问题100(a),(b),108—112)①。

在圆$\Sigma$上$P$点处相交的直线$QP$和$UP$(图114)称为**双曲几何的平行线**。由于$\Sigma$的点不是双曲平面上的点，平行线是不相交的。另一方面，当然有既不平行又不相交的直线。这样一来，通常的平行线作为不相交直线的这种定义，不等价于双曲几何中平行线的上述定义。

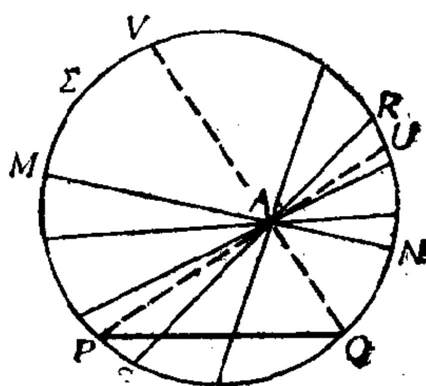


图 114

正如在图114中所看到的，平行于$PQ$的直线$AU$和$AV$将经过$A$的直线中与$PQ$相交的和不与$PQ$相交的直线分隔开。所以我们可以把经过$A$点平行于$PQ$的直线定义为这样的两条直线$AU$和$AV$，它们既与$PQ$不相交，又使得经过$A$点在角$UAV$内部的直线都和$PQ$相交。有趣的是，平行的这个"非欧几里得"定义在欧几里得几何中成立(只不过在后一种几何中直线$AU$和$AV$重合，并且角$UAV$是一个平角)。这个事实就是把直线$AU$和$AV$定义为$PQ$的平行线的根据，并且它暗示欧几里得的平行和双曲平行之间的许多相似的地方。

① 在某个定理的一种证明中用到平行公理，并不说明该定理没有不用平行公理的证明。因而，一个定理的某个证明在双曲几何看来是不对的，并不意味着这个定理在双曲几何中不成立。

在双曲几何中既不平行又不相交的直线称为**超平行的**，有时也叫“发散的”，因为当沿着这种直线朝随便哪个方向移动时，它们之间的距离无限地增加(看下面的问题100(c))。

100. (a) 设$PQ$和$RS$是双曲平面中交于一点$B$的两条直线。试证明：在$B$的任意一侧，从$RS$的点到直线$PQ$的距离无限增加；而且，从$RS$的所有的点到$PQ$的垂足，即$RS$的点到$PQ$的投影，在直线$PQ$上只布满一个有限的线段$P_1Q_1$(换句话说，$RS$在$PQ$上的投影是$PQ$上的一个有限线段$R_1Q_1$)；$PQ$在点$P_1$和$Q_1$处的垂线平行于$RS$。

相交直线$PQ$和$RS$的相互关系的所有这些特点，用示意的形式表示在图115(a)中，其中曲线$RBS$表示“双曲直线”$RS$。平行于$RS$的直线$P_1R$和$Q_1S$表示成$RS$的渐近线；示意图的这个特性是根据本问题的部分(b)得来的。

(b) 设$PQ$和$UP$是双曲平面上的两条平行直线。试证明：沿射线$AP$的方向($A$是$UP$上的任意一点)从$UP$上的点到$PQ$的距离无限递减(即趋向于0)，而沿射线$AU$的方向则无限递增；$UP$到$PQ$的投影是一射线$Q_1P$；并且$PQ$在$Q_1$的垂线平行于$UP$。

平行直线$PQ$和$PU$的相互关系的所有这些特性表示在图115(b)中。

(c) 试证明：双曲平面上的超平行直线$PQ$和$MN$有一条(唯一的)公垂线$KL$，反之，有一条公垂线的两条直线是超平行的。从直线$MN$的点到直线$PQ$的距离，无论在公垂线的垂足$K$的哪一边都是无限递增的。$MN$到$PQ$的投影是一个有限线段$P_1Q_1$；$PQ$在点$P_1$和$Q_1$处的垂线平行于$MN$。

超平行线$PQ$和$MN$的相互关系的这些特征，以示意图

的方式表示在图115(c)中。

由于从直线 $MN$ 上的点 $A$ 到直线 $PQ$ 上各点的所有距离中，最短的距离是沿着从 $A$ 到 $PQ$ 的垂线量度的(有关的欧几里得的定理在双曲几何中成立，看第146页中的说明)，又由于从直线 $MN$ 上的点到超平行于 $MN$ 的直线 $PQ$ 的距离，

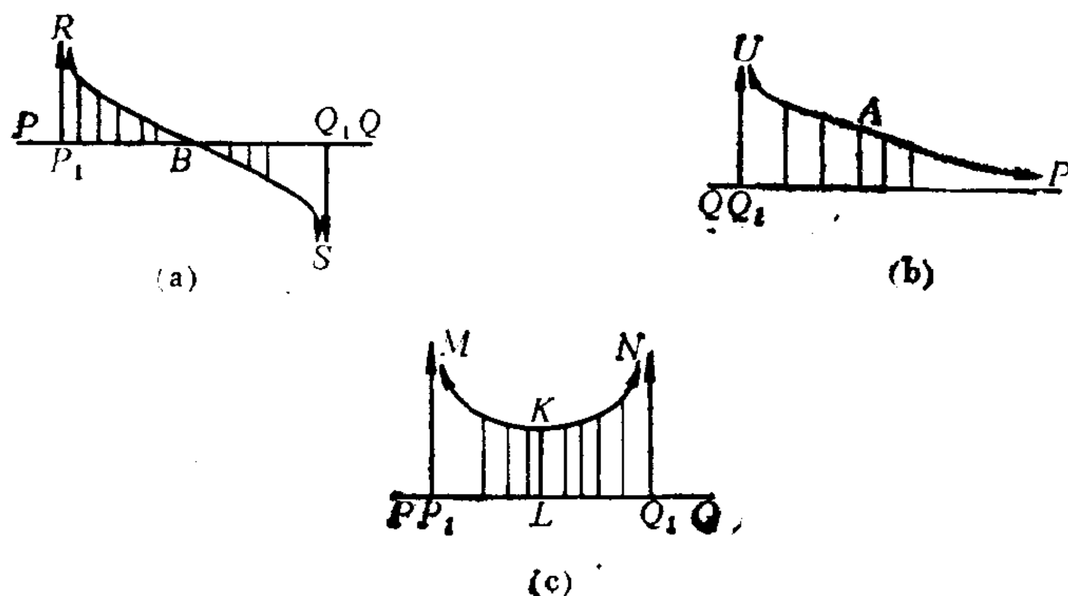


图 115

在这两条直线的公垂线 $KL$ 的垂足 $K$ 的两边都是递增的（参看问题100(c))，因此 $KL$ 的长度是它们之间的最短距离；这说明把线段 $KL$ 的长度叫做超平行线 $PQ$ 和 $MN$ 之间的距离是合理的。与欧几里得几何不同，在双曲几何中平行线之间没有合理的距离概念（可以证明，双曲平面上的任意一对平行线能够用双曲运动变成任意别的一对平行线）。

由于双曲平面上的两条相交或平行直线没有公垂线，并由于超平行的两条直线恰有一条公垂线（参看问题100(c))，所以在双曲几何中两条直线不能有两条公垂线；换句话说，在双曲几何中没有矩形（即有四个直角的四边形）（还可参看下面的问题108(b))。

问题100(c)还说明另一个差异：在欧几里得几何中，如果两条直线和第三条直线垂直，则它们平行；反之，两条（或多条）平行线总能看成垂直于同一条直线。而在双曲几何中，垂直于同一条直线的两条直线不可能是平行的；问题

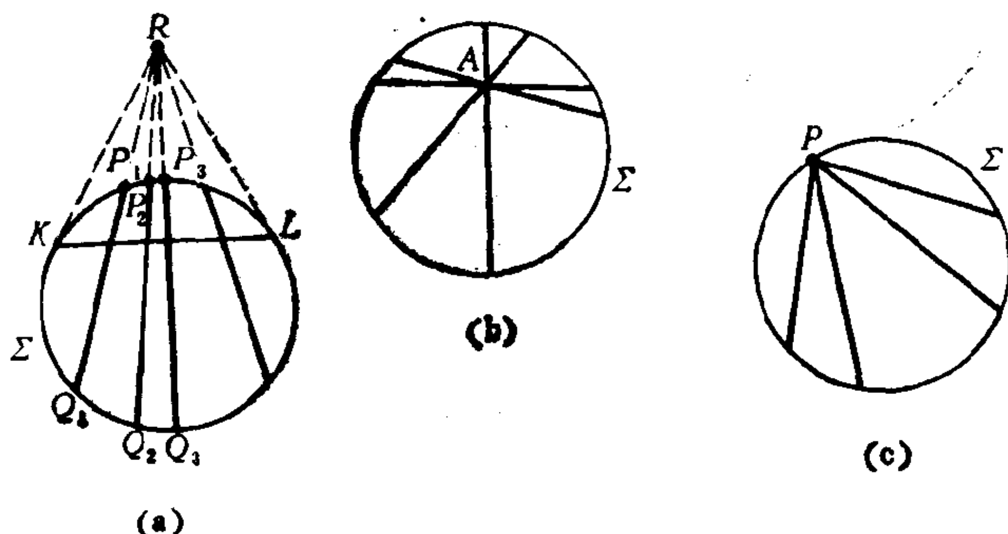



图 116

100(c)指出这些直线必定是超平行的。大家注意，如果在双曲平面上的直线 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \cdots$ 垂直于同一条直线 $KL$，则弦 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \cdots$ 超出圆盘**K**的延长线必经过同一个点 $R$，即圆 $\Sigma$ 在点 $K$ 和 $L$ 处的切线的交点，由此，三条或多条超平行直线（即垂直于同一条直线的三条或多条直线）的性质也就清楚了[图116(a)]。这样，圆盘**K**的交于它的一个内点 $A$ 的弦，构成双曲平面的一束相交直线[图116(b)]；交于圆 $\Sigma$ 上一点 $P$ 的弦构成一束平行直线[图116(c)]；其延长线交于**K**外一个点 $R$ 的弦构成一束超平行直线[图116(a)]。

下面我们继续来阐述双曲几何中点和直线的相互关系的奇异特性。设角 $PAQ$ 是由射线 $AP$ 和 $AQ$ 构成的双曲角。则在角 $PAQ$ 内部的直线 $PQ$ 同时平行于 $AP$ 和 $AQ$，并且将

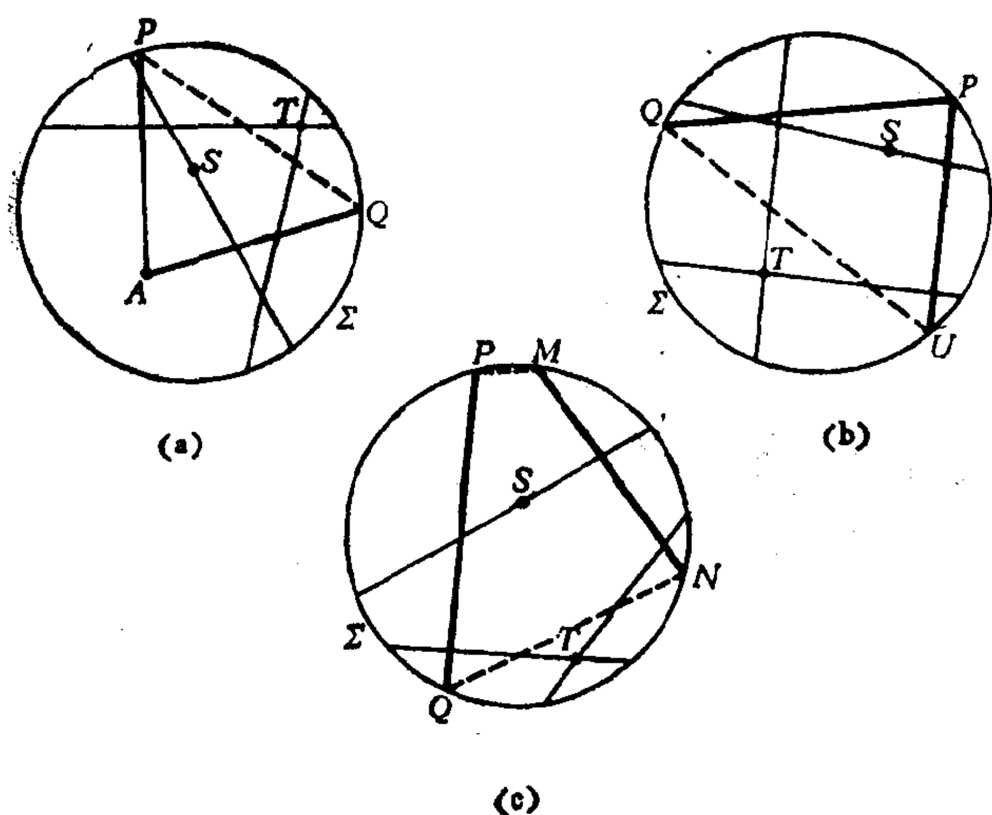



图 117

下列两种点分开：一种是经过它可以作与该角的两边都相交的直线的点，另一种是经过它不能作那样的直线的点(图117(a)；大家记得，在欧几里得几何中，经过一个角的任意一个内点总可以作一直线与该角的两边都相交）．类似地，如果 $QP$ 和 $UP$ 是双曲平面的平行线，则在由这两条直线所围的区域内部的直线 $UQ$ 与给定的这些直线平行，并且将下列两种点分开：一种是经过它可以作与 $QP$ 和 $UP$ 都相交的直线的点，另一种点则没有这种性质[图117(b)]。最后，在两条超平行直线 $PQ$ 和 $MN$ 的情形，有两条直线 $MP$ 和 $NQ$，它们将下列两种点分开：一种点是经过它可以作与 $PQ$ 和 $MN$ 都相交的直线，另一种点则不具有这种性质[图117(c)]。双曲几何的所有这些奇异的特性，示意地表示在图

118(a)—(c)中。

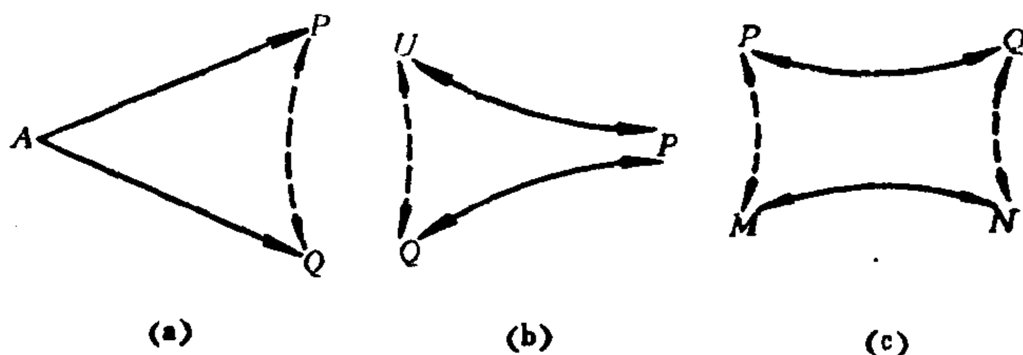



图 118

101．(a) 试证明：双曲平面的两条直线 $l_1$ 和 $l_2$ 总有一条对称轴 $l$（在双曲几何中关于一条直线对称的定义，与欧几里得几何中的相同；参看《几何变换》第一册，第二章，§1的开始部分）．并证明 $l_1, l_2$ 和 $l$ 属于一个束（即它们或共点，或平行，或垂直于同一条直线；参看第153页）．

(b) 试证明：如果双曲平面上的直线 $l_1, l_2, l$ 属于同一个束，并且 $l$ 是 $l_1$ 和 $l_2$ 上的点 $A_1$ 和 $A_2$ 的对称轴，则 $l$ 是直线 $l_1$ 和 $l_2$ 的对称轴。

102．双曲平面上的一个四边形，如果它们的对角线被它们的交点平分，就叫做**双曲平行四边形**．试证明：

(a) 双曲平行四边形的对边全等。

(b) 双曲平行四边形的对角全等。

(c) 如果一个双曲平行四边形的对角线垂直，则它的所有的边都全等，且对角线平分其顶角；这种平行四边形称为**双曲菱形**。

(d) 如果一个双曲平行四边形的对角线全等，则它的所有的角都全等；这种平行四边形可以称为**双曲矩形**，虽然，它的角肯定不是直角（参看第152页）．

(e) 如果一个双曲平行四边形的对角线全等并且垂直，则它的所有的边全等，所有的角也全等；这种平行四边形可以称为**双曲正方形**。

103. 双曲平行四边形（参看上一个问题）的对边平行吗？

104. 试证明：在双曲几何中锐角三角形的三条高线共点。这个定理对钝角三角形成立吗？

105. 试证明：在双曲几何中三角形的中线共点。

106. 欧几里得几何中有命题：三角形中线交点分中线（从顶点开始）之比为2∶1。在双曲几何中它成立吗？

107. 试证明：在双曲几何中三角形的边的垂直平分线属于同一个束（即它们或共点、或平行、或与同一条直线垂直；参看第153页）。

108. (a) 试证明：在双曲平面中三角形的内角之和总小于180°①。

(b) 试证明：在双曲平面中$n$角形的内角之和总小于$(n-2)180°$。

109. 试证明：双曲平面中$n$角形的面积跟$(n-2)180°$与该$n$角形内角之和的差成比例；特别，角为$\angle A,\angle B,\angle C$的三角形的面积是$k(180°-\angle A-\angle B-\angle C)$，其中的系数$k$和面积单位的选择有关。

$(n-2)180°$（欧几里得几何中$n$角形的内角之和）与双曲平面中一个$n$角形的内角和之差，称为这个$n$角形的角

① 可以证明，对于其和小于180°的角$A,B,C$的每种选法都存在一个双曲三角形，其角为$A,B,C$。问题109和110的令人惊奇的结果和这个事实有关。在欧几里得几何中，规定一个三角形的三个角等价于规定它的两个角（由于第三个角由头两个角确定），并且这样不能唯一确定一个三角形。然而，在双曲几何中三角形的三个角却是互相独立的，并且它们确定这个三角形。

亏。于是，问题109中的定理可以叙述如下：**双曲平面中$n$角形的面积与它的角亏成正比**。特别，由此可以推出，$n$角形的面积愈小，其内角之和愈接近于$(n-2)180°$。

110．试证明双曲几何中关于三角形全等的第四个判别法：如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角全等，则这两个三角形全等。

问题110的一个推论是下列有基本重要意义的事实：在双曲几何中没有相似而不全等的图形。如《几何变换》第二册的引论中所指出的，欧几里得几何的定理实际上是相似几何的定理，即它所讨论的是几何图形在相似变换下保持不变的那些性质。这是由于在欧几里得几何中没有一个定理依赖于长度单位的选择；因此，没有一个定理能够讨论线段的长度，而只能讨论线段的长度之比。然而，在双曲几何中，没有相似而又不全等的图形，因此没有一种变换（与双曲运动不同的）能够称作"双曲相似"。鉴于我们同欧几里得几何相接触的长期经验，这种差异可能给我们以特别离奇的印象；这就是为什么我们要相当详细地讨论这个问题的原因。

大家注意，欧几里得几何中的定理可能依赖于角的度量单位的选择；例如，如果我们定义1度等于一个直角的1/100而不是1/90，则定理："一个三角形的内角之和是180°"显然要改写①。距离和角度之间的这种差异是由于在欧几里得

---

① 换句话说，在欧几里得几何中，一个定理可能说到角的大小，或线段的大小之比，但不能说线段的大小（例如，参看下列定理中关于长度和角度的提法：在有一个角为30°的直角三角形中，该角的对边等于斜边的一半）．例如，在1918年俄国采用新的度量衡制时，并不需要在那时的基谢廖夫教科书中作任何更改，就是这个原因；而角的量度单位一旦有了变化，就必须改变许多定理的陈述．

几何中可以给出角度单位的纯几何定义（直角就是这样的一个单位，它可以定义为与它的补角全等的角；直角的一个确定的部分也是如此；另一种是弧度，一个弧度即所对的弧长等于半径的一个中心角），但是和这相反，没有一种提供特定的长度单位的几何方法。在双曲几何中情况就不是这样，可以给出长度单位的一种纯几何的定义；例如，有一个角是45°的等边三角形的一条边，可以取作一个长度单位(根据问题110,这是一个完全确定的线段）。这意味着在双曲几何中一个定理的陈述，可以依赖于长度单位的选择。

大家注意，从问题109和110可以推出，在双曲几何中能够对面积单位下几何的定义，譬如说，规定$n$角形的面积等于它的角亏，或规定具有指定角的三角形的面积作为面积的单位。

我们打算讨论的最后一个问题是双曲平面的运动的分类。在《几何变换》第一册中大家看到，欧几里得几何的两个正向全等的图形可以用两个对直线的反射使它们叠合（看《几何变换》第一册，第二章，§2，特别是第60页）。在双曲几何中，我们可以用几乎一样的方法证明：*两个正向全等的图形可以用两个对直线的反射使它们叠合*。在双曲几何中，对一条直线的反射、正向全等和反向全等的定义，与欧几里得几何中相应的定义类似（参看《几何变换》第一册，第二章，§1,2的开头部分）[①]。然而，在欧几里

① 我们建议读者证明：这些定义以及在《几何变换》第一册第60页的论证，可以无需改变地搬到双曲几何中.

通过类似于在欧几里得几何中所用的论证，可以证明两个反向全等的图形能够用三个对直线的反射使它们叠合.

得几何中，两条直线的关系只有两种本质上不同的方式。即它们或者平行或者相交；而在双曲几何中，它们的关系却有三种本质上不同的方式：相交、平行或超平行。这说明，为什么在欧几里得几何中正向运动的类型的个数是两个（旋转与平移，即对两条相交直线的反射之积与对两条平行直线的反射之积），而在双曲几何中正向运动的类型的个数却是三个。对这三种正向运动类型的讨论如下。

(1) 对于在 $A$ 点相交的直线 $l_1$ 和 $l_2$ 的反射的乘积［图119(a)］。在这个运动下 $A$ 点保持不动，因而经过 $A$ 的直线束 $\Pi_1$ 变到它自身；即这个束中的每一条直线变为同束中的某一条直线。设 $B$ 是双曲平面中的一点，$B_1$ 是 $B$ 在对 $l_1$ 的反射下的象，$B'$ 是 $B$ 在对 $l_1$ 和 $l_2$ 的反射的乘积下的象。则 $B_1$ 和 $B$ 关于 $l_1$ 对称，并和 $B'$ 关于 $l_2$ 对称。容易看到，$B'$ 和 $B$ 关于直线 $BA$ 和 $B'A$ 的对称轴对称。实际上，根据问题107中的定理（应用于三角形 $BB_1B'$），点 $B$ 和 $B'$ 的对称轴属于包含 $l_1$ 和 $l_2$ 的束 $\Pi_1$。所以，由问题101(b)中的结果，点 $B$ 和 $B'$ 的对称轴同直线 $BA$ 和 $B'A$ 的对称轴相同，这就是所要证的。

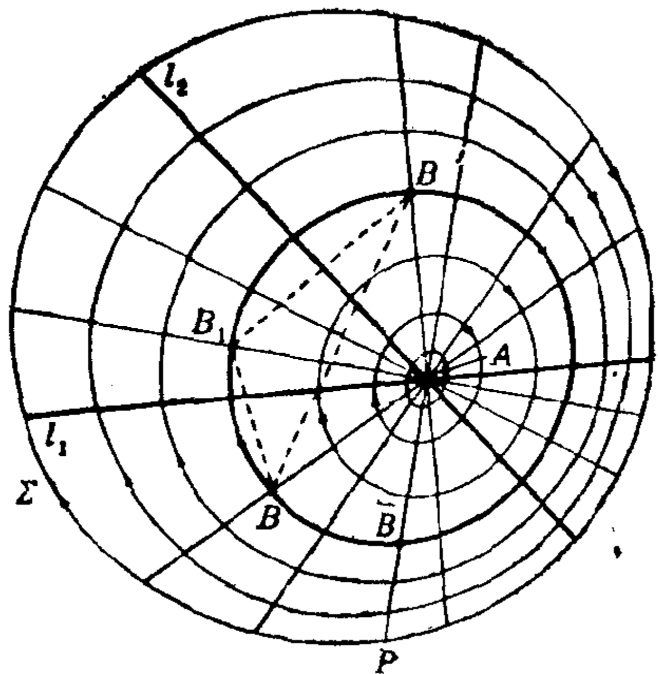


图 119(a)

在束$\Pi_1$的每条直线 $AP$ 上，选出与 $B$ 关于直线 $AP$ 和 $AB$ 的对称轴对称的一点 $\bar{B}$，并将 $\bar{B}$ 的轨迹叫做以 $A$ 为中心的双曲圆。现在我们可以简明地说，在运动(1) 下，一个点和它的象属于以 $A$ 为中心的同一个圆（参看图119(a)）。

以 $A$ 为中心的圆可以更简单地定义为与 $A$ 等距离[①]的点的轨迹，因为保持 $A$ 点不动的运动也保持动点到 $A$ 的距离。以 $A$ 为不动点的(1) 型双曲运动可以称为绕 $A$ 的双曲旋转。

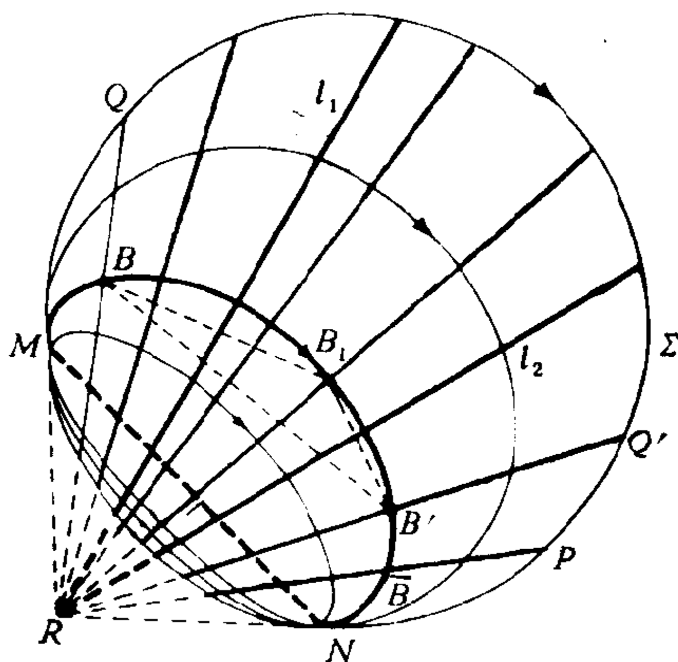



图 119 (b)

(2) 对垂直于直线 $MN$ 的两条超平行线 $l_1$ 和 $l_2$ 的反射的乘积[图119(b)]。在这个运动下直线 $MN$ 保持不动，这说明与 $MN$ 垂直的超平行直线束 $\Pi_2$ 变到它自身($\Pi_2$中的每一条直线都变成 $\Pi_2$ 中的一条相应的直线)。设 $B$ 是双曲平面上的

① 是在双曲意义下的等距.从欧几里得几何的观点来看，所提到的轨迹当然不是一个圆.可以证明，所说的曲线（以及后面讨论的在双曲平面中表示等距曲线和极限圆的那些曲线）是欧几里得几何中的椭圆.

一点，$B_1$是$B$在对直线$l_1$的反射下的象，$B'$是$B$在对直线$l_1$和$l_2$的反射的乘积下的象。则$B_1$和$B$关于$l_1$对称，并且和$B'$关于$l_2$对称。容易看到，$B'$和$B$对于束$\Pi_2$中的直线$BQ$和$B'Q'$的对称轴对称。实际上，根据问题107中的定理（应用于三角形$BB_1B'$），点$B$和$B'$的对称轴属于束$\Pi_2$，$\Pi_2$包含$l_1$和$l_2$。所以根据问题101(b)的结果，$B$和$B'$的对称轴与直线$BQ$和$B'Q'$的对称轴重合，这就是所要证的。

在束$\Pi_2$的每一条直线上，选取跟$B$关于该直线和直线$BQ$的对称轴对称的点$\bar{B}$。点$\bar{B}$的轨迹我们叫做等距曲线，并把直线$MN$叫做它的轴。于是，在运动(2)下一个点和它的象在以$MN$为轴的同一条等距曲线上[图119(b)]。

以$MN$为轴的等距曲线，可以更简单地定义为在$MN$的一边并且到直线$MN$等距离的点的轨迹。这是因为保持一条直线不动的运动，也保持从一动点到该直线的距离不变①。由存在一条不动直线$MN$（这直线“沿着它自身滑动”）所刻划的（2）型运动，可以称为沿直线$MN$的双曲平移。

(3) 对两条平行直线$l_1$和$l_2$的反射的乘积[图119(c)]。这个运动把与$l_1$和$l_2$平行的直线束$\Pi_3$变成它自身，因为对直线$l_1$或$l_2$的反射都把$\Pi_3$中的直线变成$\Pi_3$中的直线，所以这些反射的乘积也是这样。设$B$是双曲平面中的一点，$B^1$是$B$在对直线$l_1$的反射下的象，$B'$是$B$在对$l_1$和$l_2$的反射的乘积下的象。则$B_1$与$B$关于$l_1$对称，并且与$B'$关于$l_2$对称。容易看到，$B'$与$B$关于直线$BP$和$B'P$的对称轴对

① 因此称为“等距曲线”。注意，根据问题100(a)—(c)的结果，到一给定直线$MN$等距（并且在$MN$的一侧）的点的轨迹不是一条直线。

大家注意，在关于双曲几何的著作中，等距曲线有时定义为到一直线$MN$的距离是一常数的点的轨迹，这种定义取消了我们要求轨迹点在$MN$的一侧的限制。

图 119 (c)

称。实际上，根据问题 107 中的定理，点 $B$ 和 $B'$ 的对称轴属于束 $\Pi_3$，$\Pi_3$ 包含直线 $l_1$ 和 $l_2$。所以，根据问题 101(b) 的结果，点 $B$ 和 $B'$ 的这个对称轴同直线 $BP$ 和 $B'P$ 的对称轴相同，这就是所要证的。

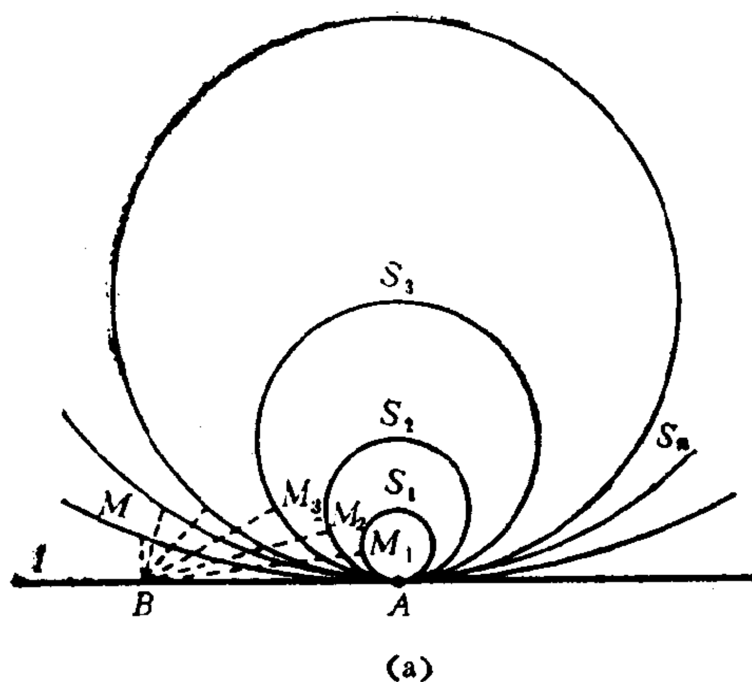
在束 $\Pi_3$ 的每一条直线上，选取与 $B$ 关于直线 $AB$ 和 $BP$ 的对称轴对称的点 $\bar{B}$。我们将 $\bar{B}$ 的轨迹称为极限圆。如此，在(3)型运动下一个点沿着一个极限圆运动[图 119(c)]。

在欧几里得几何中，经过 $A$ 点并在该点与给定直线 $l$ 相切的圆的序列，当这些圆的半径趋向无穷大时趋向于直线 $l$；所以有时候说“直线是半径为无穷大的圆”[图120(a)]①。

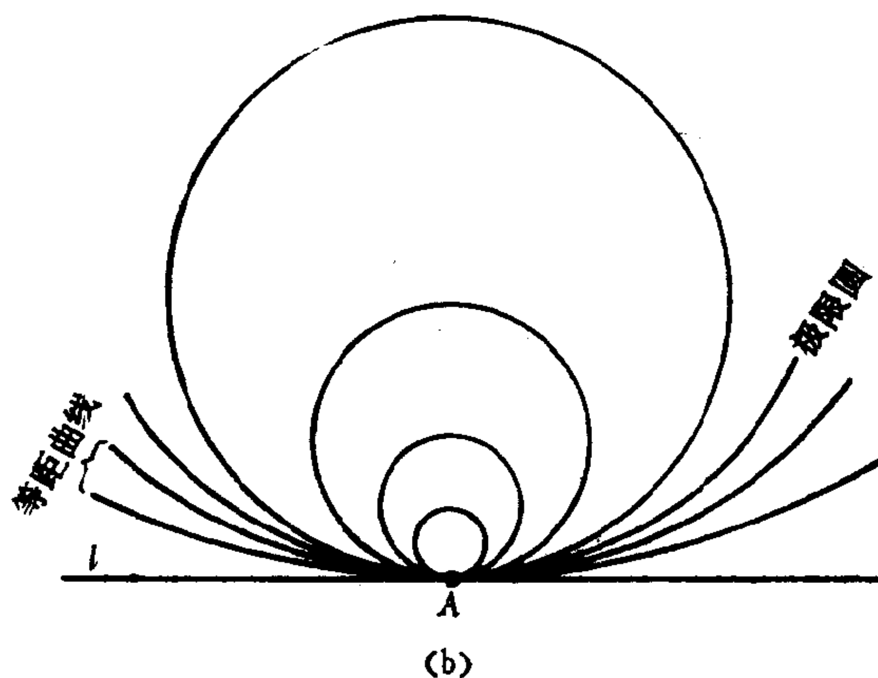
① 从一点 $B$ 到一曲线 $\Gamma$ 的距离，我们指的是从 $B$ 到 $\Gamma$ 上的点的距离的极小值。这样，如果 $\Gamma$ 是一直线 $l$，则从 $B$ 到 $l$ 的距离等于从 $B$ 到 $l$ 的垂线的长度，而如果 $\Gamma$ 是一个以 $O$ 为中心的圆 $S$，则从 $B$ 到 $S$ 的距离是两个线段 $BM$ 和 $BN$ 中较短的一个的长度，其中 $M$ 和 $N$ 是直线 $BO$ 同圆 $S$ 的交点。这些话的意思是：如果在 $A$ 点与直线 $l$ 相切的圆 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 的半径趋向无穷大，则从 $l$ 上任意一点 $B$ 到圆 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 的距离 $BM_1$，$BM_2$，$BM_3$，…趋向于0[图120(a)]。

对后面的双曲几何的内容应当作类似的解释。

在双曲几何中情况就不是这样。不难看到，经过点$A$并且在$A$点与给定直线$l$相切的圆的序列，当圆的半径趋向无穷大时，趋向于一个经过$A$点并且与$l$相切的"极限圆"；这就是说，在这里"半径为无穷大的圆"是一个极限圆而不是一条




(a)




(b)

图 120

直线。此外，经过$A$点并与$l$在$A$相切的等距曲线的序列，根据等距曲线的宽度是趋向于无穷大还是趋向于零（一条等距曲线的宽度指的是从它的点到它的轴的距离，图120(b))，分别趋向于上面的在$A$点的极限圆或趋向于直线$l$。

三种曲线——圆，极限圆和等距曲线——中的每一种曲线都可以定义为与一束直线正交的曲线①；在圆的情形这是一束相交的直线，在极限圆的情形是一束平行直线，而在等距曲线的情形则是一束超平行直线。

111.试证明：在双曲平面上，对于给定的一个三角形可以外接一个圆、一个极限圆或一条等距曲线。

大家注意，由于三角形的角平分线的交点到它的边等距离，所以总可以在它的内部作一个内切圆。

112.试证明：在双曲几何中圆的周长和它的半径之比不是常数。

问题112证明了在双曲几何中不全等的圆不相似。(参看第157页)②。

我们对双曲几何的研究到此为．上面的讨论是建立在第130页的定义的基础上的。双曲几何的所有定理都可以归结为关于一个圆盘$K$的点(和弦)的通常的定理，双曲几何所研究的内容是要找出在将$K$映射到自身上的射影变换下圆盘$K$

---

① 两条曲线在一个交点处的夹角指的是它们在这个交点处的切线的夹角．

② 另一个推论是，角$\alpha$的弧度的通常定义（作为中心角$\alpha$所对的弧长和该圆的半径之比）不能搬到双曲几何中来，因为在这里这个比值不仅依赖于$\alpha$，而且也依赖于半径的大小．角的弧度可以用纯形式的方法引入双曲几何，只要规定数$\pi=3.14159\cdots$作为一个平角的弧度，或者用如下较为复杂的几何作法：角$\alpha$的弧度定义为中心角$\alpha$所对圆弧的长度与该圆半径之比当半径趋向于零时的极限．

(和在它内部的图形)的保持不变的那些性质。然而，研究双曲几何(以及任何其它的几何)还有别的途径。有一种方法在第145—149页上已经提到过(参看三角形全等的第一判别法的证明和关于三角形的角平分线共点的定理的证明)，它在于将非欧几里得几何的定理建立在有限多个公理的基础上，这和在中学里讲授欧几里得几何所用的方法完全类似。当从公理推演双曲几何时，我们只需要修改欧几里得几何的一条公理，即平行公理。代替这条公理的是下面的**公理**：假设$A$是不在直线$l$上的一个点，则经过$A$有多条直线不同$l$相交。在双曲几何的这种体系中，并不涉及它同圆盘$\boldsymbol{K}$的点和弦的关系；我们不用以那个圆盘为特征的图形，而用类似于图115，118或120(b)那样的示意图来解释各种情况。

从历史上来看，双曲几何首先是在公理的基础上发展起来的。人们企图用其它的公理来证明平行公理，进行了长期的研究，由此产生了双曲几何。关于这个公理是否能从欧几里得几何的其它公理推导出来，人们曾怀疑了很长的时间。在证明这个公理的尝试中，数学家们用了所谓"反证法"，即假定平行公理不成立，试图在这个前提下推出矛盾。所有这些尝试都没有什么成果。确实，通过否定这个平行公理所得到的定理显得很离奇，但是它们并不互相矛盾。C. F.高斯(Gauss)，N. I.罗巴切夫斯基(Lobachevski)和J. 波里亚(Bolyai)等首先明确指出：通过否定这条平行公理可以得到一种新的、和通常的(欧几里得的)几何同样和谐的几何：直到这时这个问题才获得解决①。罗巴切夫斯基和波里亚把这

① 关于N. I.罗巴切夫斯基和J.波里亚发现双曲几何以及C.F.高斯作出的贡献(他独立地得到了双曲几何的概念)的非常有趣的历史，在R. Bonola, Non-Euclidean Geometry (Dover Publications, New York, 1955)中可以找到。

种新的几何推进到无论在内容上、还是在逻辑结构上都可以和欧几里得几何相匹敌的地步。双曲几何的产生(罗巴切夫斯基第一个发表他的发现的时候，大约是1829年)，证明了平行公理是不能从欧几里得几何的其它公理推出来的。

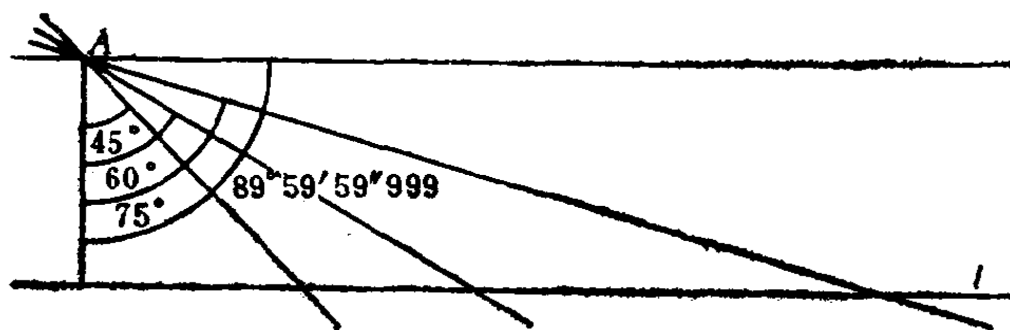



图 121

我们在上面说过，双曲几何和欧几里得几何是一样无矛盾的。然而，如果回到物理空间，那么两种几何中似乎只能有一种是适用的；事实上，从物理空间的观点来看，似乎显然只有欧几里得几何是唯一"眞实的"几何①。然而，这两种几何同物理现实的关系问题实际上要比想象的复杂得多。沒有直接的实验能够确定平行公理的眞伪，因为显然不可能用实验的方法来证明：经过给定的一个点$A$只能有一条直线同给定的直线$l$不相交。借助于几何直观同样不能作出明确的回答。显然，如果$A$靠近$l$，则经过$A$点并同从$A$到$l$的垂线构成"充分小"的角(譬如说，45°，60°或75°；参看图

① 要更准确地说的话，在这两种几何中似乎欧几里得几何更准确地反映了物理空间的性质。其实，要问究竟哪一种几何在物理空间中成立，是没有意思的，因为几何的基本元素——点，直线等等——不是在物理上可以实现的对象，而仅仅是我们周围的物体的性质的理想化。这就是为什么几何学不能象物理学、化学或生物学那样包含在自然科学中的原因，那些学科的结论要受到实验的检验。我们所能讨论的，只是哪一种几何能够对空间中非常小的部分和光线的轨道(我们分别把它们当作点和直线)的性质给出较为准确的描述。

(21)的直线，肯定同 $l$ 相交，但是对于同该垂线的夹角“实际上是一个直角”——譬如说，等于 $89°59'59.999''$ 的角——的直线，这一点就不是那么明显了. 当从 $A$ 到 $l$ 的距离非常大，比如说，比从地球到太阳的距离还要大时，求助于几何直观简直就毫无意义了. 当然，可以尝试用实验解决三角形的内角之和的问题(参看问题108)；用这个方法解决空间的几何性质问题是高斯和罗巴切夫斯基提出来的. 高斯企图用大地测量来确定顶点在三个相距很远的山顶的大三角形的内角之和. 罗巴切夫斯基则企图在天文数据的基础上，确定以三颗星星作为顶点的非常大的三角形的内角之和①. 这里的困难是：所有的测量都只具有由测量仪器的性能确定的有限的精度，而在实验的基础上我们所能得出的结论，不过是三角形的内角之和近似地等于某一个值，并给出误差的一个估计. 因此，这类实验不能确证三角形的内角和等于180°. 然而，可以设想：实验有可能证明三角形的内角之和不等于180°，从而断定欧几里得几何不是空间性质的准确反映. 现在在这方面所能说的只是：在所有测量中，我们观测到的三角形内角之和偏离180°的观测偏差都不超过实验误差的界限.

因此，直到用某种特别精确的实验解决什么是空间的真实几何的争论之前，我们看到上述两种几何在研究物理世界的规律时是同样有用的②. 为弄清究竟是哪一种可能的几何

① 大家记得，从问题109的结果来看，双曲三角形的面积愈大，则它的内角之和与180°的差也愈大.

② 在研究双曲几何时，我们必须用象图115和118那样的失真了的图形，这个事实对双曲几何能否作为空间的“真实”几何没有影响，在欧几里得几何中我们之所以能够利用准确的图形，同相似变换的存在性有着非常密切的关系，用相似变换可以作出平面的一个大区域按比例缩小的模型(参看《几何变换》第二册的引论). 在双曲几何中没有相似变换(参看第157页)，所以要在一张纸上描绘大区域时，我们必须用失真了的图形(如用曲线表示直线，等等).

系统（这就包括与欧几里得几何和双曲几何不同的其它的几何；参看下面的讨论）最适用于描述物理空间的性质而所作的努力，在很大程度上促进了物理学的发展。在这个领域中最惊人的成就就是通常所说的相对论[①]（A.爱因斯坦的“特殊相对论”，1905；和“一般相对论”，1916）。它从根本上改变了我们关于空间中大区域的几何的观念，并且完全消除了按照问题的原来提法的双曲几何的眞假性问题。遗憾的是我们在这里不能比较深入地介绍这个理论，虽然它与本书的主题有着密切的关系。

C. F.高斯，N. I.罗巴切夫斯基和J.波里亚的伟大功绩，在于他们首先打破了欧几里得几何是唯一的、不可替代的观念。虽然高斯，罗巴切夫斯基和波里亚非常广泛地展现了他们的几何而确实沒有发生矛盾，但是在原则上他们还是沒有解决这种几何是否无矛盾的问题[②]。

在这方面E.贝尔脱拉米（Beltrami）的工作有重要意义。在1868年他证明了，双曲几何可以在通常（欧几里得）空间中的某种特殊的曲面上实现（假设曲面上两点$A$，$B$之间的距离定义为曲面上连接$A$和$B$的最短曲线的长度；这种“最短的”曲线在曲面的几何中起直线的作用）。这个发现证明了如果欧几里得几何是无矛盾的，则双曲几何也是无矛盾的，从而在这个意义上将双曲几何置于和欧几里得几何同

① 相对论的某些方面的初步介绍，可以在J. T. Schwartz, Relativity in Illustrations (N.Y.U.Press, N.Y. 1962)中找到。另一本用不同的观点写的引论性的书是本丛书中K. O. Friedrichs的《从毕达哥拉斯到爱因斯坦》。

② C.F.高斯和N. I.罗巴切夫斯基是如此深信这两种几何的无矛盾性，以至于他们很少考虑这整个的问题。另一方面，波里亚则被这个问题弄得非常苦恼；他对于与双曲几何有关的一整套复杂问题的深刻见识确实是令人震惊的。他非常艰苦地试图严格证明双曲几何是无矛盾的。但是他失败了。因为他的数学素养要比高斯和罗巴切夫斯基差得多。

等的地位。

在贝尔脱拉米的工作发表两年之后，F.克莱因（Klein）发表了他关于非欧几何的第一篇论文。两种不同的几何的存在性，促使克莱因考虑几何究竟指的是什么的问题；他对这个问题的回答在本书的引论中介绍过。克莱因从一开始就将双曲几何放在与欧几里得几何同等的地位。还应当认为是他给出了在第130页上的双曲几何的定义．这就意味着在通常的欧几里得平面的圆盘 $K$ 内部实现双曲几何的可能性（贝尔脱拉米已经提示过），并证明这种几何是无矛盾的，即平行公理不能从欧几里得几何的其它公理推出来。克莱因甚至走得更远，他通过找出射影变换的各种充分小的子群，得到了许多（准确地说是九种）平面几何，在每种几何中都自然地引进了两点之间的距离和两条直线之间的夹角的概念①．现在，不同于欧几里得几何的所有几何都称为非欧几里得几何，从而使得双曲几何只是许多种非欧几里得几何中的一种而已②。

大家注意，双曲几何无矛盾性的贝尔脱拉米和克莱因的

---

① 例如，参看I.M.Yaglom, Complex Number in Geometry, Academic Press, New York 1968。

② 双曲几何在非欧几里得几何中是很特别的一种，因为它满足欧几里得几何中除平行公理以外的所有公理．其它的非欧几里得几何与欧几里得几何有更为根本的差别；它们中的有一些，一个线段不能朝两边无限地延长；而在另一些中，两个点并不是总能够用一条直线相连接的。（有一种几何与这种非欧几何有关，那就是黎曼几何，看《几何变换》第四册中的附录。）这些说法预先假定大家知道了欧几里得几何的“传统的”公理化，这种公理化由D.希尔伯特在他的著作《几何基础》（1899）（江泽涵等译，科学出版社，1958．——中译者）中完成。对欧几里得平面概念采用不同的方式，可能会影响给定的几何系统与欧几里得几何的相对的“近似程度”。例如，从显然应归于H.外尔（Weyl, 1918）的欧几里得几何的“向量式”（即基于向量空间的概念）公理化的观点来看，最接近于欧几里得几何的“克莱因的非欧几里得几何”，是所谓（二维）“闵可夫斯基（Minkowski）几何”，这种几何是（特殊）相对论的基础。在这同一个体系中，非常不同于欧几里得几何的一种几何，是根本不用向量概念的双曲几何。

证明，并不是仅有的两种可能的证明。在欧几里得空间中，可以构造双曲几何的多种模型，这些模型不同于贝尔脱拉米模型(一个特殊的空间曲面上的点集，并具有在曲面上量度的距离)或克莱因模型(一个圆盘$K$的点集，具有与通常不同的方式量度的距离)①。另一种有趣的模型是在第二章的附录②中讨论的庞加莱模型。

---

① 我们在这里无法解释是由于贝尔脱拉米模型的哪些缺陷，使得人们产生一种看法，即认为克莱因模型是双曲几何无矛盾性的第一个令人满意的证明。尽管如此，在这方面我们应当指出，还是贝尔脱拉米首先证明了无矛盾性，因为他的文章实质上也包含了在这个附录中所描述的双曲几何模型，这种模型今天通称为"克莱因模型"或"贝尔脱拉米-克莱因模型"。(克莱因独立地发现了这个模型。贝尔脱拉米关于双曲几何无矛盾性的第一个实质上不正确的证明，给他的同时代人的印象是如此之深，以至于他们简单地忽视包含在这同一篇文章中的正确的第二个证明。)

② 参考《几何变换》第四册。对于庞加莱模型的讨论，英文的著作有H. Meschkowski, Noneuclidean Geometry, Academic Press, New York 1964；或E.E.Moise, Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, Addison Wesley 1963, Ch.25(pp.348—366)；或D. Pedoe, A Course of Geometry for Colleges and Universities, Cambridge Univ.Press 1970, Ch.6(pp.206—241).

# 解　答

## 第一章　仿射变换和射影变换

1

1．设 $ABC$ 是平面 $\pi$ 上的一个任意三角形．在从 $\pi$ 到平面 $\pi'$ 的一个适当的平行射影下，$\triangle ABC$ 的象是一个等边三角形 $A'B'C'$．根据平行射影的性质C，$\triangle ABC$ 的边的中点的象是$\triangle A'B'C'$的边的中点．由于$\triangle A'B'C'$ 是等边的，它的中线也是它的角平分线，从而交于一点——内切圆的中心，因此原三角形 $ABC$ 的中线共点①．

2．设 $ABCD$ 是一个梯形，$E$是它的不平行边（的延

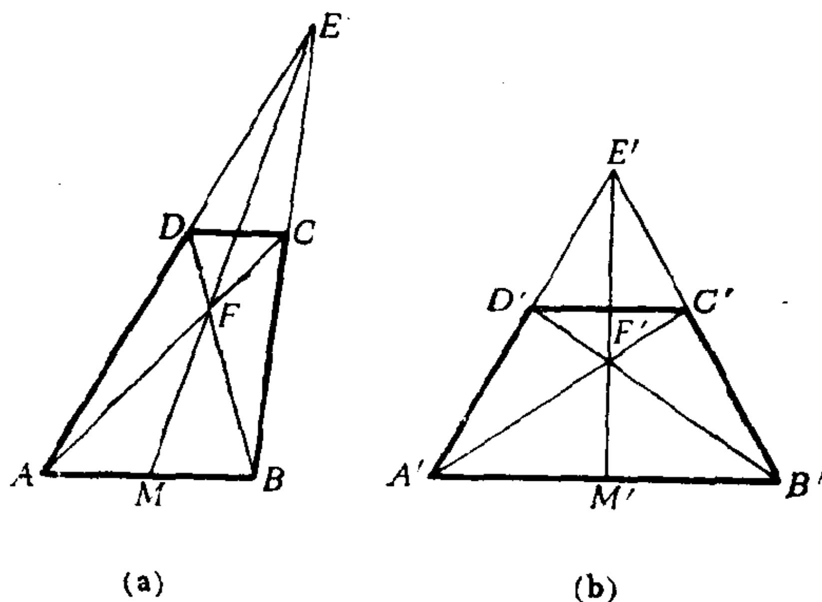



图　122

① 三角形的角平分线共点，可以从下列事实直接推出：角平分线是到角的两边等距离的点的轨迹．三角形中线共点的一般的证明，需要作辅助线，这种作图就现在的方法来说是多余的．

长线）的交点，$F$ 是它的对角线的交点。从梯形所在的平面 $\pi$ 到平面 $\pi'$ 上的适当的平行射影下，三角形 $ABE$ 的象是一个等腰三角形 $A'B'E'$；同时，根据平行射影的性质 B，梯形 $ABCD$ 变成梯形 $A'B'C'D'$（图 122）。显然，直线 $EF$ 的象 $E'F'$ 是等腰三角形 $A'B'E'$ 的对称轴，所以平分梯形 $A'B'C'D'$ 的底 $A'B'$ 和 $C'D'$。根据平行射影的性质 C，就可推出直线 $EF$ 平分原来梯形 $ABCD$ 的底 $AB$ 和 $CD$。

大家注意，用这种方法也能够证明上述定理的逆定理：设 $F$ 是三角形 $ABE$ 的中线 $EM$ 上一点，用直线分别连结 $F$ 和顶点 $A$，$B$，如果这些直线与三角形的边交于点 $C$ 和 $D$，则直线 $CD$ 平行于 $AB$（图122(b)说明如果三角形 $ABE$ 是等腰的，就是这种情形）。

3.(a) 在平面上选取一点 $E$，它不在直线 $l$ 或 $l_1$ 上，作 $E$ 到 $l$ 上的点 $A$ 和 $B$ 的连线。设 $D$ 和 $C$ 分别是 $EA$ 和 $EB$ 同直线 $l_1$ 的交点，并设 $F$ 是直线 $AC$ 和 $BD$ 的交点［图123(a)］，则直线 $EF$ 平分线段 $AB$（参看问题 2）。

(b) 在 $l$ 上选取两点 $A$ 和 $B$，找出线段 $AB$ 的中点 $G$

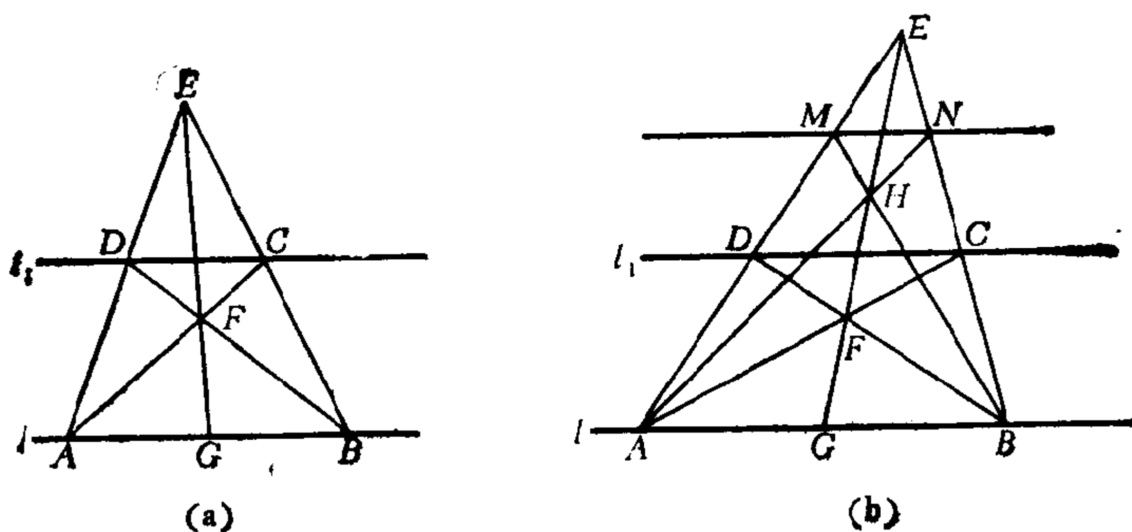



图 123

(参看(a))。设$E$是直线$AM$上一点，$H$是直线$EG$和$BM$的交点，$N$是直线$AH$和$BE$的交点[图123(b)]。则$MN$就是所要的平行于$l$的直线(参看问题2的解后面的注释)。

(为了找出$AB$的中点和作平行于$l$的直线，在作上面的图时，用同一个三角形$ABE$比较方便。)

4. (a) 用一个适当的平行射影，可以将三角形$ABC$映射到平面$\pi'$的等边三角形$A'B'C'$上；根据平行射影的性质C，这个映射将把点$M,N,P$变成点$M',N',P'$，使得$A'M'/M'B'=B'N'/N'C'=C'P'/P'A'$ (图124)，把$\triangle A'B'C'$绕它的中心旋转120°角，边$A'B',B'C',C'A'$依次变为边$B'C',C'A',A'B'$，而点$M',N',P'$则依次变为点$N',P',M'$。因此，这个旋转将$\triangle M'N'P'$变成它自身；而这说明$\triangle M'N'P'$也是一个等边三角形，且它的中心与$\triangle A'B'C'$的中心重合。换句话说，$\triangle M'N'P'$的中线的交点和$\triangle A'B'C'$的中线的交点重合。由于平行射影将三角形的中线变成它的象三角形的中线，$\triangle MNP$的中线的交点也和$\triangle ABC$的中线的交点重合[1]。

(b) 可以用类似于(a)的解法证明。

5. 如果三角形$ABC$是等边的，则显然所要找的点$M$到$\triangle ABC$的边应当等距离；即$M$必须是$\triangle ABC$的内切圆的中心，或者说，$M$是$\triangle ABC$的中线的交点。由此可以推

① 等边三角形的中心与它的角平分线的交点(内切圆中心)，它的边的垂直平分线的交点(外接圆中心)，以及它的高线的交点(垂心)，最后还有它的中线的交点(形心)互相重合。然而，从$\triangle A'B'C'$的角平分线交点与$\triangle M'N'P'$的角平分线交点重合，当然并不能推出对于三角形$ABC$和$MNP$有类似的结果(一般地说，平行射影不将角平分线变成角平分线)；也不能断定三角形$ABC$和$MNP$的高线交点相同，或它们的外接圆中心重合。所能够肯定的只是这些三角形的中线的交点重合，因为平行射影将三角形的中线变成象三角形的中线。

出，对任意三角形 $ABC$，所要找的点 $M$ 必定与它的中线的交点重合（参看附于问题4(a)的解答后面的脚注）。

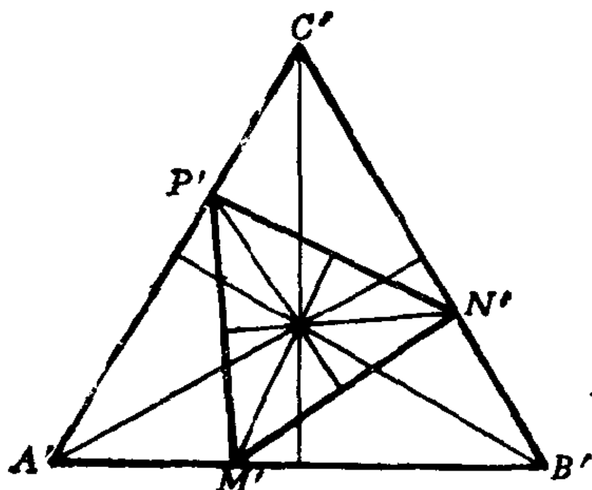


图 124

6. 如果 $ABC$ 是一个等边三角形（图125），则三角形 $ABC$ 和 $A_2B_2C_2$ 的边平行（为什么？），即这些三角形是中心相似的（参看《几何变换》第二册）。由此可以推出在一般情形下，三角形 $ABC$ 和 $A_2B_2C_2$ 中心相似①，所以是相似的。

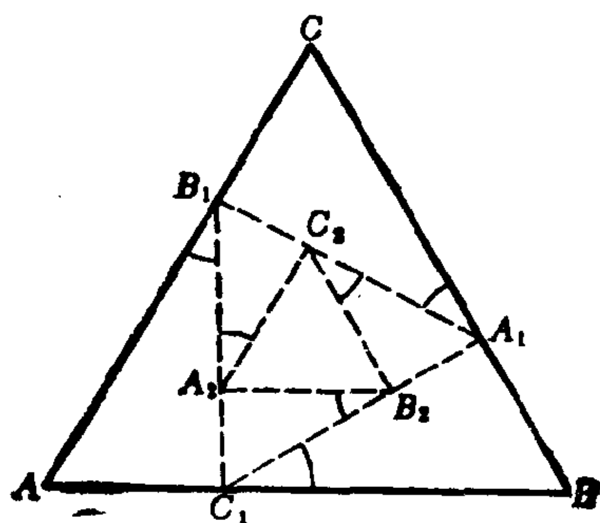


图 125

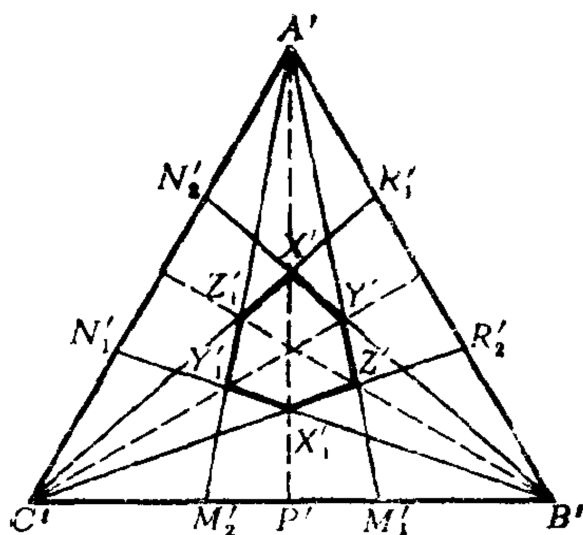


图 126

7. 对于等边三角形这个定理显然成立。由此推出对任意三角形定理同样成立（例如，参看问题 1 的解答）。

---

① 注意，平行射影保持图形的中心相似关系，但不一定保持图形的相似关系，这就是我们在证明时所以要“绕弯”的原因。

8. 只需对等边三角形 $A'B'C'$ 证明我们的结论就够了（参看问题1和4的解）。由于 $A'N'_2=A'C'/3$ 和 $A'R'_1=A'B'/3$（看图126），直线 $C'R'_1$ 和 $B'N'_2$ 关于$\triangle A'B'C'$的对称轴 $A'P'$ 对称，所以这两条直线的交点 $X'$ 在 $A'P'$ 上。类似地，从 $B'R'_2=B'A'/3$ 和 $C'N'_1=C'A'/3$，可以断定直线 $B'N'_1$ 和 $C'R'_2$ 的交点 $X'_1$ 也在 $A'P'$ 上。因此，我们的六边形的对角线 $X'X'_1$ 与$\triangle A'B'C'$的对称轴 $A'P'$ 重合。用同样的方法可以证明，这个六边形的对角线 $Y'Y'_1$ 和 $Z'Z'_1$ 与等边三角形 $A'B'C'$ 的另外两条对称轴重合。这就说明上面的三条对角线必定交于一点——等边三角形的中心。由此推出，在$\triangle ABC$ 中对角线 $XX_1, YY_1, ZZ_1$ 交于一点。

**注** 我们的解答证明了直线 $XX_1, YY_1, ZZ_1$ 是$\triangle ABC$的中线，它们的交点就是中线的交点。

9. (a)根据平行射影的性质C和D以及第一章，§1中的定理1，只要对等边三角形 $A'B'C'$ 证明我们的结果就可以了（图127(a)；参看问题1和4的解答）。设 $p$ 表示线段 $B'M'$ 和 $A'M'_1$ 的大小，$r$ 是 $A'P'$ 和 $C'P'_1$ 的大小，$q$ 是 $C'N'$ 和 $B'N'_1$ 的大小，而 $a$ 则表示等边三角形 $A'B'C'$ 的边的大小；$\triangle XYZ$ 的面积用 $S_{XYZ}$ 表示。则有

$$S_{A'B'C'}-S_{M'N'P'}=S_{A'P'M'}+S_{B'M'N'}+S_{C'N'P'}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ[r(a-p)+p(a-q)+q(a-r)]$$

$$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ[a(p+q+r)-(pq+qr+rp)],$$

以及

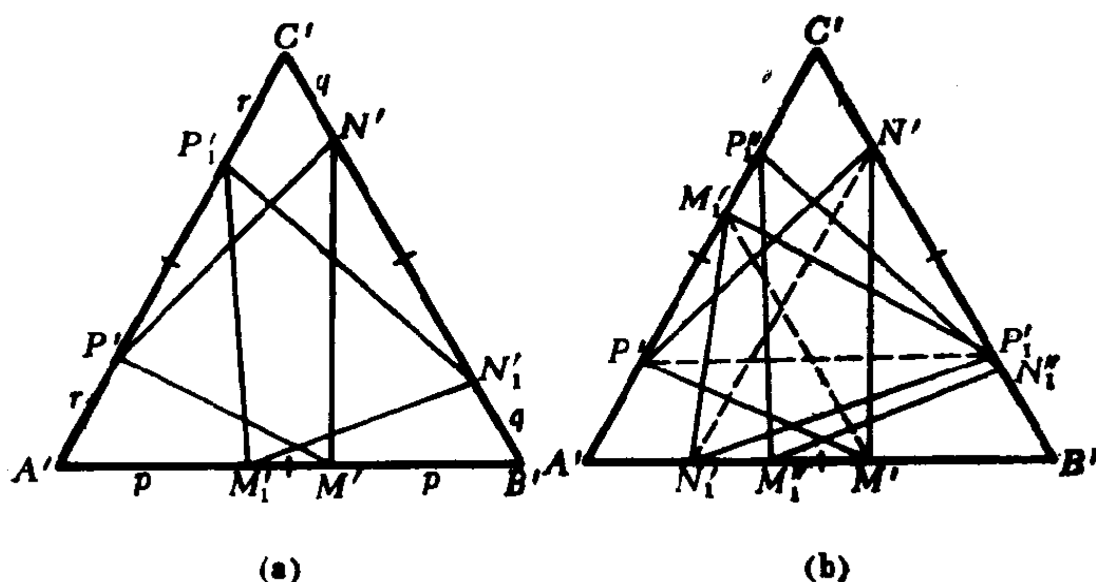
$$S_{A'B'C'} - S_{M_1'N_1'P_1'} = S_{A'P_1'M_1'} + S_{B'M_1'N_1'} + S_{C'N_1'P_1'}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60°[(a-r]p + (a-p)q + (a-q)r]$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60°[a(p+q+r) - (pq+qr+rp)].$$

因此

$$S_{M'N'P'} = S_{M_1'N_1'P_1'}.$$




(a)

(b)

图 127

(b) 正如(a)中的一样，只需对等边三角形 $A'B'C'$ 证明这个结论就够了[图127(b)]。由于 $M'M_1' \mathbin{/\mkern-6mu/} B'C'$, $N'N_1' \mathbin{/\mkern-6mu/} C'A'$, $P'P_1' \mathbin{/\mkern-6mu/} A'B'$，可以推出

$$A'M' = A'M_1', \quad B'N' = B'N_1', \quad C'P' = C'P_1'.$$

将$\triangle A'B'C'$绕它的中心反时针方向旋转 120°角。这个旋转把$\triangle A'B'C'$变到它自身，并且根据上面的等式，它把$\triangle M_1'N_1'P_1'$ 变成$\triangle M_1''N_1''P_1''$，后者的顶点与$\triangle M'N'P'$ 的顶点关于$\triangle A'B'C'$的适当的边的中点是对称的。从这个事

实和上面部分(a)中已经证明的结果，可以推出

$$S_{M_1''N_1''P_1''} = S_{M'N'P'} ,$$

所以

$$S_{M_1'N_1'P_1'} = S_{M'N'P'}.$$

象在(a)的解答中那样，通过直接计算不难证明三角形$M'N'P'$和$M_1'N_1'P_1'$的面积相等。

10. 这个解答类似于问题9(a)的解答，请读者自己证明。

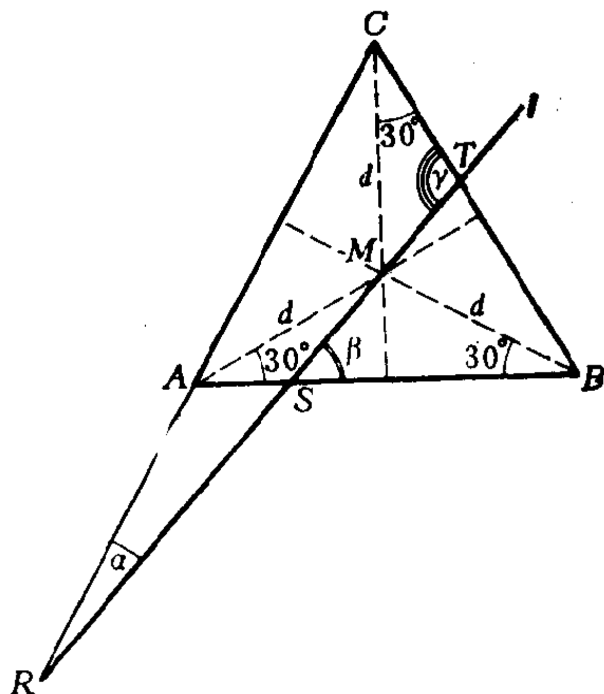



图 128(a)

11.(a) 设$ABC$是等边三角形。考虑图128(a)。对三角形$AMR, BMS, CMT$应用正弦定律(并注意到$d=2/3\times$ $\triangle ABC$的中线)，我们有

$$\frac{d}{MR} = \frac{\sin\alpha}{\sin 150^\circ} = 2\sin\alpha, \quad \frac{d}{MS} = \frac{\sin\beta}{\sin 30^\circ} = 2\sin\beta,$$

$$\frac{d}{MT}=\frac{\sin\gamma}{\sin 30^\circ}=2\sin\gamma,$$

所以有

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{2}{d}(\sin\alpha+\sin\beta)\text{ 和 }\frac{1}{MT}=\frac{2}{d}\sin\gamma.$$

显然①，$\alpha=120^\circ-\gamma$，$\beta=\gamma-60^\circ$。所以

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=\sin(120^\circ-\gamma)+\sin(\gamma-60^\circ)\\&=\sin(120^\circ-\gamma)-\sin(120^\circ+\gamma)\\&=-2\cos 120^\circ\sin\gamma=\sin\gamma;\end{aligned}$$

即对于等边三角形 $ABC$，我们有 $1/MR+1/MS=1/MT$。

为了说明这个关系式对任意三角形 $ABC$ 成立，大家注意它等价于关系式 $MT/MR+MT/MS=1$，而且用适当的平行射影和相似变换，总可以将等边三角形变成任意一个三角形 $ABC$。

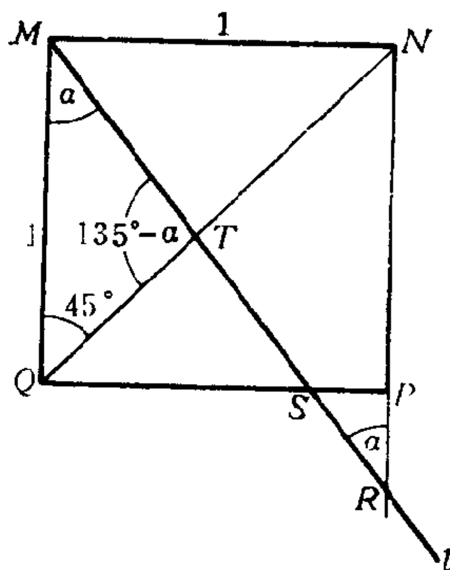



图 128(b)

用类似的理由可以证明，假若我们（譬如说）以中线 $AD$ 的中点 $N$ 代替 $M$，则刚才建立的关系式将变成类似的一个关系式，即以 $2/NX, 1/NY, 1/NZ$（$X$ 表示三个点 $R,S,T$ 中在 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的点，$Y$ 和 $Z$ 表示其中的另外两点）分别代替 $1/MX, 1/MY, 1/MZ$ 所得到的

① 要使这个问题的解答与图形无关，必须引进有向角（参看《几何变换》第一册，第二章，§ 1 的注）。

式子。

(b) 设平行四边形 $MNPQ$ 是一个单位正方形[图128(b)]。则在三角形 $MRN, MSQ, MTQ$ 中有

$$\frac{1}{MR}=\sin\alpha,\qquad \frac{1}{MS}=\cos\alpha,$$

$$\frac{1}{MT}=\frac{\sin(135^\circ-\alpha)}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}\sin(135^\circ-\alpha)^{①}.$$

由于

$$\sin(135^\circ-\alpha)=\sin(45^\circ+\alpha)=\sin 45^\circ\cos\alpha+\cos 45^\circ\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha),$$

我们有

$$\frac{1}{MT}=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]=\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$=\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS},$$

即对于正方形 $MNPQ$ 有

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}.$$

为了说明这个关系式对于任意平行四边形成立，大家注意这个式子等价于关系式 $MT/MR+MT/MS=1$，而且用一个适当的平行射影总可以将任意平行四边形 $ABCD$ 变成正方形(为此，只要将 $\triangle ABC$ 变成等腰直角三角形即可)。

---

① 同上页的注。

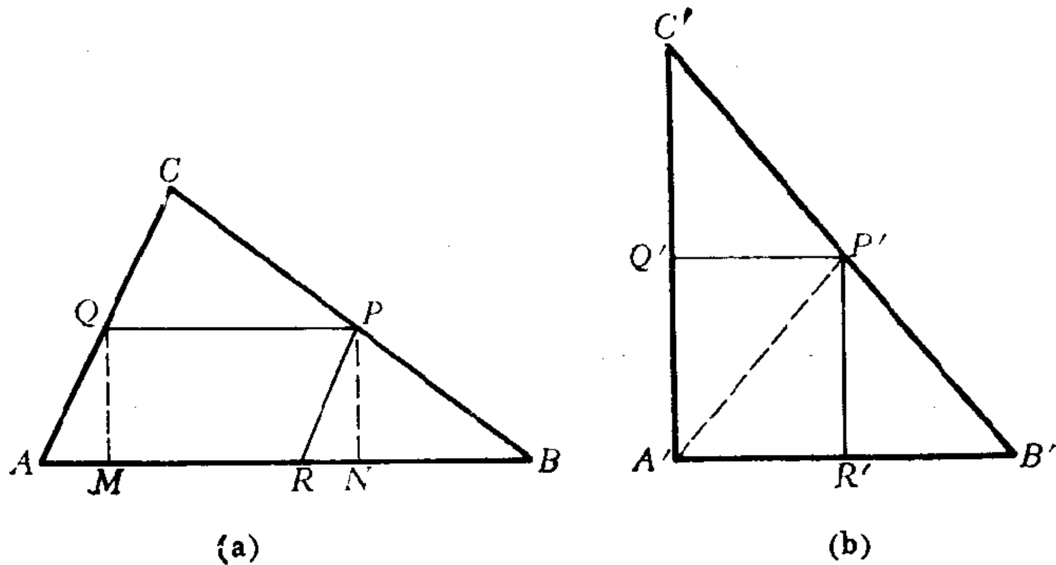



图 129

12．这个问题和下列问题等价：在给定的三角形 $ABC$ 中，内接一个给定面积为 $\sigma$ 的平行四边形 $ARPQ$，使得它和 $\triangle ABC$ 有一个公共的顶点 $A$，而其余的顶点则分别在三角形的边 $AC,BC,AB$ 上。这一点不难从图129(a)看出来，在这个图形中可以看到平行四边形 $ARPQ$ 和矩形 $MNPQ$ 的面积相等(由于它们有相同的底 $PQ$ 和高 $QM$)。换句话说，假若我们能够作出平行四边形 $ARPQ$，也就能作出矩形 $MNPQ$。

如果一个平行射影将平面 $\pi$ 上的 $\triangle ABC$ 映射为平面 $\pi'$ 上的三角形 $A'B'C'$，则内接于 $\triangle ABC$ 的平行四边形 $ARPQ$ 映射为内接于 $\triangle A'B'C'$ 的平行四边形 $A'R'P'Q'$。(这就是为什么我们要将作矩形 $MNPQ$ 的问题转化成作平行四边形 $ARPQ$ 的原因：平行射影一般不将矩形变成矩形，这就使得我们难于用平行射影来解决原来的问题。) 假设那个内接平行四边形 $ARPQ$ 已经作出来。用一个适当的平行射影将 $\triangle ABC$ 映射到等腰直角三角形 $A'B'C'$ 上[图129(b)]。我

们可以假定三角形 $ABC$ 和 $A'B'C'$ 有相同的面积(通过对 $\triangle ABC$ 的象作一个适当的相似变换总能做到这一点)；则平行四边形 $ARPQ$ 和 $A'R'P'Q'$(当然，后者是一个矩形)也有相同的面积 $\sigma$。如果 $S$ 是 $\triangle ABC$ 的面积，则等腰直角三角形 $B'R'P'$ 和 $C'P'Q'$ 的面积之和是 $S-\sigma$。由于

$$S_{B'R'P'}=\frac{1}{2}R'P'^2, \qquad S_{C'P'Q'}=\frac{1}{2}Q'P'^2,$$

可以推出

$$R'P'^2+Q'P'^2=2(S-\sigma),$$

又由于 $R'P'^2+Q'P'^2$ 是矩形 $A'R'P'Q'$ 的对角线 $A'P'$ 的平方，即得 $A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}$。

这个分析提供了作矩形 $MNPQ$ 的方法。作一个等腰直角三角形 $A'B'C'$，其面积 $S$ 等于给定三角形 $ABC$ 的面积($\triangle A'B'C'$ 的边 $A'B'$ 等于 $\triangle ABC$ 的底和高的几何平均)。然后在斜边 $B'C'$ 上选取一点 $P'$，使得 $A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}$。最后，将给定 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 分成比 $BP/PC=B'P'/P'C'$ (平行射影的性质 C)。则矩形 $MNPQ$(顶点 $Q$ 在边 $AC$ 上，而顶点 $M$ 和 $N$ 在边 $AB$ 上)就是所要的那种矩形。

这个问题可以有两个解，一个解或无解。

13. 设 $\pi$ 是正文中图13所在的平面。可以肯定，能够用一个平行射影将 $\pi$ 映射到平面 $\pi'$ 上，使得图13中的角 $AMN$ 和 $ARS$ 变成等角 $A'M'N'$ 和 $A'R'S'$，并使得 $\angle R'A'M'$ 是直角。实际上，为了使得作为象的三角形 $A'M'N'$ 和 $A'R'S'$(它们有公共角 $A'$)相似(即为了 $\angle A'M'N'=\angle A'R'S'$)，只需要它们的边成比例

$$(*) \qquad \frac{A'M'}{A'N'}=\frac{A'R'}{A'S'},$$

由于比

$$\frac{A'S'}{A'M'}=\frac{AS}{AM}=\alpha \quad 和 \quad \frac{A'N'}{A'R'}=\frac{AN}{AR}=\beta$$

是已知的，充分条件(*)等价于

$$\frac{A'M'}{\beta A'R'}=\frac{A'R'}{\alpha A'M'} \quad 或 \quad \frac{A'M'}{A'R'}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

根据定理1，我们可以将$\triangle AMR$射影到三角形$A'M'R'$，使得$A'M'/A'R'=\sqrt{\beta/\alpha}$，并使得角$R'A'M'$是直角。这就证明了上面的论断。由此我们可以得到图130，在其中只需要证明$M'N'$和$R'S'$的交点$T$在直线$P'Q'$上。下面我们就来证明这一点。

从三角形$M'S'T'$和$R'N'T$的相似性(它们有等角)可知$M'T/R'T=M'S'/R'N'$。设$U$和$V$是从$T$到$P'M'$和$P'R'$的垂线的垂足，则从三角形$TUM'$和$TVR'$的相似性(在这两个直角三角形中，$\angle TM'U=90°-\angle TM'S'=90°-\angle TR'N'=\angle TR'V$)，可以推出$TU/TV=M'T/R'T$。

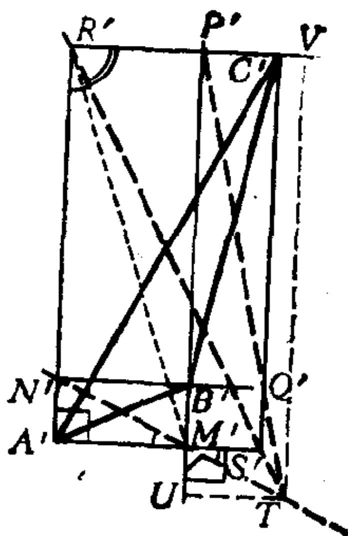



图 130

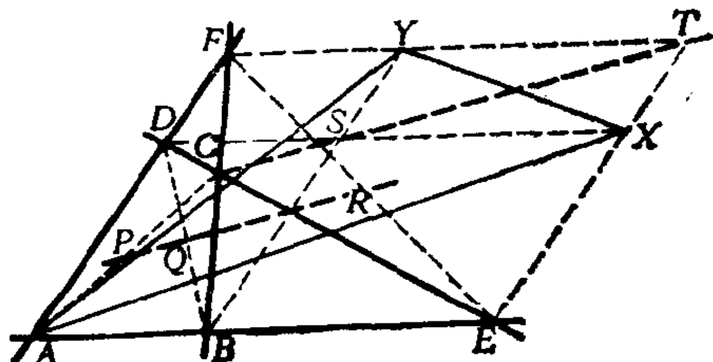



图 131

因此

$$\frac{TU}{TV}=\frac{M'T}{R'T}=\frac{M'S'}{R'N'}=\frac{Q'B'}{Q'C'}.$$

从而$TU/TV=Q'B'/Q'C'$，这就证明了$T$在直线$P'Q'$上。

14．设$P,Q,R$分别是$AC,BD,EF$的中点(图131)。以$A$为中心和2为系数的中心相似，将$P,Q,R$映射到$C,S,T$ ($ABSD$和$AFTE$是平行四边形)。因此，要证明$P,Q,R$共线，只需证明$C,S,T$共线，或等价地，直线$TS$经过$ED$和$BF$的交点$C$。后面这一点是问题13的直接推论。实际上，注意在图131中的$ADXE,XTYS,YFAB$都是平行四边形，它们的边有相同的方向，并且$\triangle AXY$的每一条边是这些平行四边形中某一个的对角线。从而它们的另一条对角线$ED$，$TS,BF$也共点。

15.(a) 显然，只需考虑$ABCD$是单位正方形的情形就够了。(参看问题11(b)的解)．由直线$AA_1,BB_1,CC_1,DD_1$构成的四边形$A_2B_2C_2D_2$(看图132)是一个正方形；这是因为，如果绕正方形$ABCD$的中心旋转90°，这个图形变成它自身，所以$A_2B_2C_2D_2$是正四边形。(顺便指出，由此可以看到：如果$ABCD$是平行四边形，则$A_2B_2C_2D_2$也是平行四边形。) 直角三角形$ABB_1$和$ABA_2$是相似的，其相似系数$k$等于它们的斜边之比：

$$k=\frac{BB_1}{AB}=\frac{\sqrt{1+(2/3)^2}}{1}=\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

由于

$$S_{ABB_1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

我们有

$$S_{ABA_2}=\frac{1/3}{k^2}=\frac{3}{13}.$$

所以

$$S_{A_2B_2C_2D_2}=S_{ABCD}-S_{ABA_2}-S_{BCB_2}-S_{CDC_2}-S_{DAD_2}$$

$$=S_{ABCD}-4S_{ABA_2}=1-\frac{12}{13}=\frac{1}{13},$$

即

$$\frac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{13}.$$

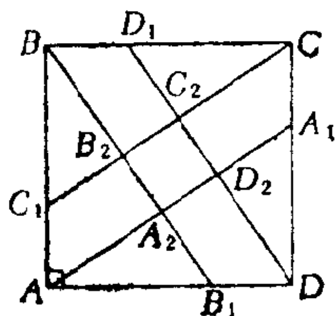



图 132

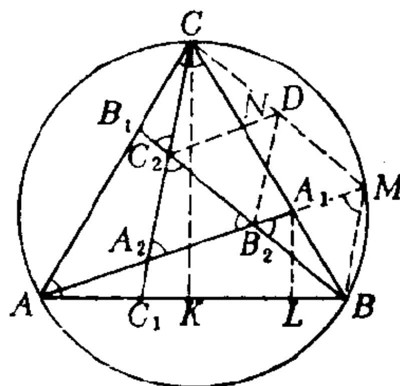



图 133

(b) 第一种解法。只要考虑边长为1的等边三角形$ABC$就够了。三角形$A_2B_2C_2$（由直线$AA_1,BB_1,CC_1$构成）是等边的，因为$\triangle ABC$绕它的中心旋转$120°$以后，$\triangle A_2B_2C_2$变成它自身。对于等边的$\triangle ABC$，三角形$CB_1C_2$和$CAC_1$（看图133，那是根据本题的第二种解法所画的）相似，相似系数为

$$k=\frac{CB_1}{CC_1}=\frac{1/3}{\sqrt{CK^2+KC_1^2}}=\frac{1/3}{\sqrt{CA^2-AK^2+KC_1^2}}$$

$$=\frac{1/3}{\sqrt{1-(1/2)^2+(1/6)^2}}=\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

由于 $S_{CAC_1}=\frac{1}{3}S_{ABC}$，有

$$S_{CB_1C_2}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot k^2=\frac{1}{21}S_{ABC}.$$

所以

$$\begin{aligned}S_{A_2B_2C_2}&=S_{ABC}-S_{CAC_1}-S_{ABA_1}-S_{BCB_1}\\&\quad+S_{CB_1C_2}+S_{AC_1A_2}+S_{BA_1B_2}\\&=S_{ABC}-3S_{CAC_1}+3S_{CB_1C_2}\\&=S_{ABC}-3\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}+3\cdot\frac{1}{21}S_{ABC}=\frac{1}{7}S_{ABC},\end{aligned}$$

即

$$\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}=\frac{1}{7}.$$

第二种解法。只要考虑等边三角形 $ABC$ 就够了。正如第一种解法中所证明的，由直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 所构成的三角形 $A_2B_2C_2$ 是等边的。设 $S$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆。命 $M$ 是 $S$ 与 $AA_1$ 的交点(图133)。从等式 $\angle BMA=\angle BCA$(它们对着同一个圆弧)可以推出 $\triangle BMB_2$ 也是等边的($\angle BMB_2=\angle BB_2M=60°$)，并且 $BM\parallel C_1C$。又从 $BM=BB_2$ 和 $BB_2=CC_2$($\triangle BB_2A_1\cong\triangle CC_2B_1$)可以推出 $BM=C_2C$，所以四边形 $BMCC_2$ 是平行四边形。经过点 $C_2$ 作 $MA_1$ 的平行线，设 $N$ 是它同直线 $BC$ 的交点。由于 $\triangle CC_2N\cong\triangle BMA_1$，有 $BA_1=NC$。由此，并根据 $BA_1=BC/3$，我们可以断定 $BA_1=A_1N=NC$。从等式 $BA_1=A_1N$ 可以推出 $BB_2=B_2C_2$，最后得到 $\triangle BB_2M\cong\triangle A_2B_2C_2$。

现在不难计算 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积。实际上，设 $B_2D$ 是平

行四边形 $BMCC_2$ 的中线，则

$$S_{B_2BM}=\frac{1}{2}S_{B_2BMD}=\frac{1}{4}S_{C_2BMC}.$$

由于 $S_{BC_2C}=S_{BMCC_2}/2$，我们有

$$S_{A_2B_2C_2}=S_{B_2BM}=\frac{1}{2}S_{BC_2C}.$$

然而

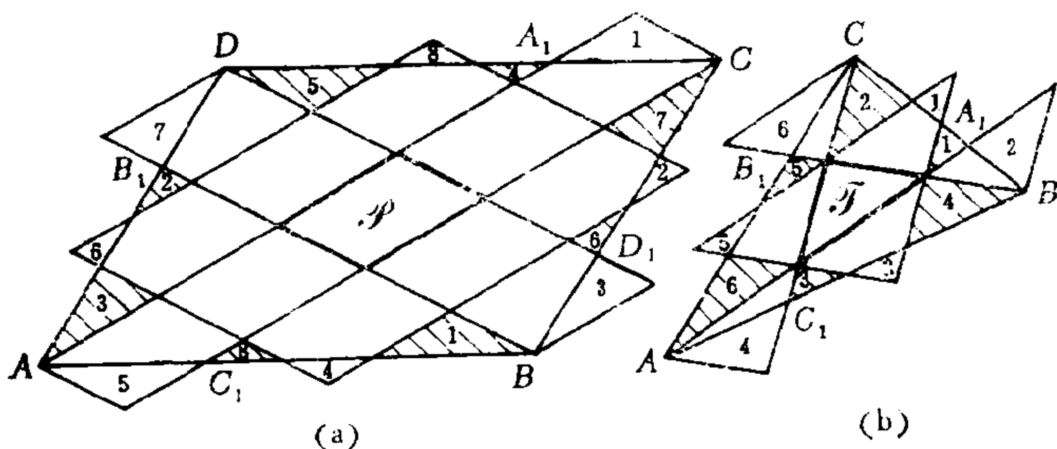
$$\begin{aligned}S_{ABC}&=S_{BCC_2}+S_{CAA_2}+S_{ABB_2}+S_{A_2B_2C_2}\\&=3S_{BCC_2}+S_{A_2B_2C_2}=7S_{A_2B_2C_2},\end{aligned}$$

因此

$$S_{A_2B_2C_2}=\frac{1}{7}S_{ABC}.$$

这就是所要证的结论。

**注** 大家可以看到，在等边三角形中成立的关系式 $BB_2=B_2C_2$，$CC_2=C_2A_2$，$AA_2=A_2B_2$，在任意三角形 $ABC$ 中也必定成立。



编者附注：当B.戈登(Gordon)教授阅读这份原稿时，对问题15的(a)和(b)提出了下面的解法：

在186页的图中，“外面的”每一个小块全等于用相同号码标出的“内部的”带有阴影的小块。在第一个图形中，非阴影部分的面积显然是平行四边形$\mathscr{P}$的面积的13倍，而在第二个图形中，非阴影部分的面积则是三角形$\mathscr{T}$的面积的7倍。

16．在中学的几何课程中，曾经证明三角形的三条中线、三条高线和三条角平分线都构成共点的三线组。

如果我们能够用一个平行射影将$\triangle ABC$的平面映射到另一个平面上，使得直线$AN,BP,CM$变成$\triangle ABC$的象三角形$A'B'C'$的三条中线，或三条角平分线，或三条高线，则我们的问题也就解决了。显然，除非直线$AN,BP,CM$本身是$\triangle ABC$的中线，它们不能用平行射影映射到一个三角形的中线上。再有，并不是总可能将直线$AN,BP,CM$映射到三角形的角平分线上的[1]。所以剩下来就是想把直线$AN$，

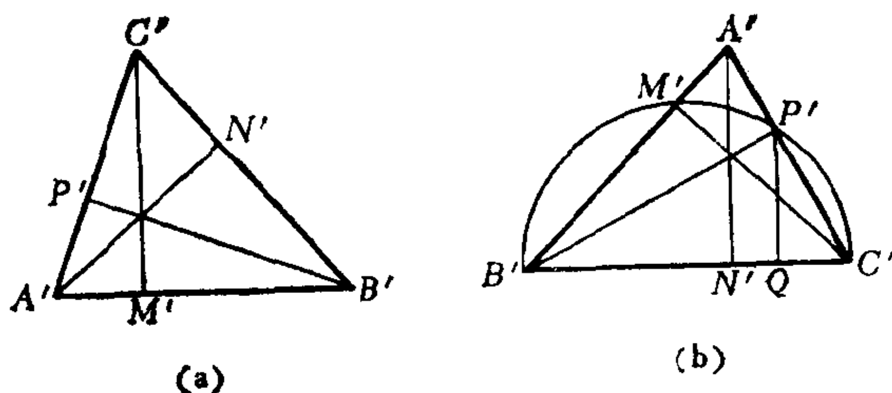



图 134

① 可以证明(我们希望读者争取给出这个证明！)：经过三角形$ABC$的顶点，并交于它的一个内点$O$的三条直线$AN,BP,CM$，可以用平行射影映射到一个三角形$A'B'C'$的角平分线$A'N',B'P',C'M'$上的充分必要条件是，点$O$在其边为$\triangle ABC$的中位线的小三角形内部。

$BP$ 和 $CM$ 用平行射影映射到一个三角形的高线上。

我们来证明：如果 $A'N'$，$B'P'$，$C'M'$ 是三角形 $A'B'C'$ 的高线[图134(a)]，则

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=1.$$

实际上，从直角三角形 $A'N'C'$ 和 $B'P'C'$ 的相似性可以推出 $C'P'/N'C'=a/b$，其中 $a=B'C'$，$b=A'C'$。用类似的方法可以证明 $B'N'/M'B'=c/a$，$A'M'/P'A'=b/c$，其中 $c=A'B'$。由这三个等式可以推出

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{A'M'}{P'A'}\cdot\frac{B'N'}{M'B'}\cdot\frac{C'P'}{N'C'}$$

$$=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1.$$

现在作三角形 $A'B'C'$，使得它的高线的垂足 $N'$，$M'$，$P'$ 分三角形的边为给定比

$$\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{AM}{MB},\quad \frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC},\quad \frac{C'P'}{P'A'}=\frac{CP}{PA}.$$

再分任意线段 $B'C'$ 成比 $B'N'/N'C'=BN/NC$，在点 $N'$ 作 $B'C'$ 的垂线。随后分线段 $C'N'$ 成比 $C'Q/QN'=CP/PA$，并在点 $Q$ 作 $C'B'$ 的垂线[图134(b)]。设以线段 $C'B'$ 为直径的半圆与这垂线的交点是 $P'$，并设 $A'$ 是直线 $C'P'$ 同 $C'B'$ 在 $N'$ 的垂线的交点。我们说△$A'B'C'$ 就是所要的三角形。实际上，$A'N'$ 和 $B'P'$ 是这个三角形的两条高线；设 $C'M'$ 是它的第三条高线。由于 $B'N'/N'C'=BN/NC$ 和 $C'P'/P'A'=C'Q/QN'=CP/PA$，并由于

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=1=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA},$$

所以有 $A'M'/M'B'=AM/MB$.

现在我们用一个平行射影将$\triangle ABC$映射到和$\triangle A'B'C'$相似的一个三角形。从平行射影的性质 C，点 $N,P,M$ 映射到$\triangle ABC$的象的高线的垂足上，而直线 $AN,BP,CM$ 则映射到它的高线上。由于三角形的高线共点，直线 $AN,BP$, $CM$ 也共点。

**注** 现在我们不难证明如下的逆命题：假若经过三角形 $ABC$ 的顶点的三条直线共点，则这些直线同$\triangle ABC$的边的交点 $N,P,M$ 分各自所在边的比适合

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

实际上，假定 $P_1$ 是边 $AC$ 上的一个点，使得

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP_1}{P_1A}=1,$$

则直线 $AN,BP_1,CM$ 共点，即 $BP_1$ 经过 $AN$ 和 $CM$ 的交点。但是这只有当 $BP_1$ 和 $BP$ 重合，即 $P_1$和$P$重合时才可能。

这样一来，我们得到有时也叫做塞瓦定理的下述定理：设 $N,P,M$ 分别是$\triangle ABC$的各边上的点(但不在它们的延长线上！)。则直线 $AN,BP,CM$ 共点的充分必要条件是

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

17. (a) 设$Q$是直线$l_1$和$l_2$的交点。将图24(a)的平面$\pi$射影到平面$\pi'$上，使得$PQ$是平面$\pi$的特殊直线。为此，只需经过$QP$任意作一个不同于$\pi$的平面$\pi_1$，并从$\pi_1$的一个点$O$将$\pi$射影到平行于$\pi_1$的平面$\pi'$上；参看图135(a)。则图24(a)（在平面$\pi$上）变成图135(b)（在平面$\pi'$上），并且直线$AC$和$BD$的交点$M$的轨迹变成直线$p'$，$p'$与$l'_1$和$l'_2$平行且等距离。从中心射影的性质A可以推出点$M$的轨迹是一直线。

如果$l_1 /\!/ l_2$，通过平面$\pi$到平面$\pi'$上的射影，使得经过$P$点与$l_1$和$l_2$平行的直线是$\pi$的特殊直线，我们也得到图135(b)。

从中心射影的性质B立即可以知道，如果$l_1$与$l_2$交于一点$Q$，则$p$经过$Q$；如果$l_1 /\!/ l_2$，则$p$与$l_1$和$l_2$平行。

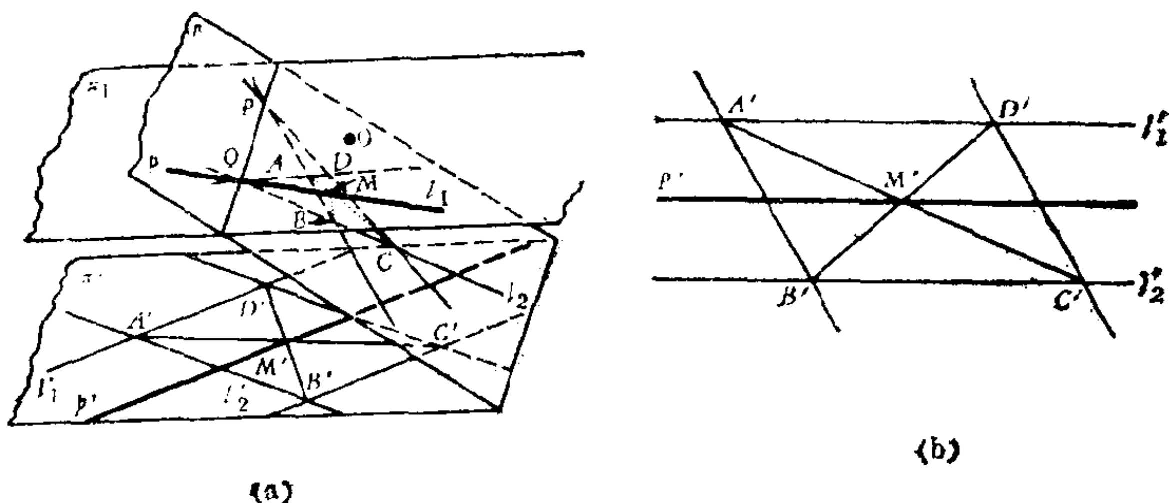



图 135

如果$P_1$是直线$PQ$上的任意一点，则在上述射影下交于$P_1$的直线变成平行线，并且直线$A_1C_1$和$B_1D_1$的交点

$M_1$ 的轨迹变成直线 $p'$。从而可以推出点 $M_1$ 的轨迹与 $p$ 重合。(类似地，如果 $l_1 /\!/ l_2$，且因此 $PP_1 /\!/ l_1$，则 $P$ 和 $P_1$ 确定同一条直线 $p$。)

(b) 将图24(b)的平面 $\pi$ 射影到平面 $\pi'$ 上，使得直线 $q$ 是 $\pi$ 的特殊直线。则直线 $UA$ 和 $UB$，$VA$ 和 $VB$ 都变成平行直线(图136)；直线 $MN$ 变成平行四边形 $M'A'N'B'$ 的对角线 $M'N'$，且在 $Q'$ 平分第二条对角线 $A'B'$。因此，对于 $U$ 和 $V$ 的每种选取，直线 $MN$ 变成与直线 $A'B'$ 交于同一点 $Q'$ 的直线 $M'N'$，从而推出所有的直线 $MN$ 交 $AB$ 于同一个点 $Q$。

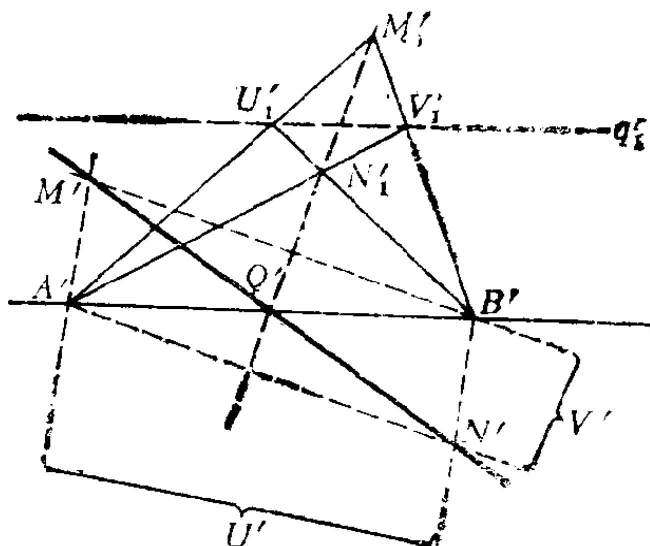


图 136

现在设 $q_1$ 是另一条直线，它与 $AB$ 交于点 $P$。在上述射影下，$q_1$ 变成与 $A'B'$ 平行的直线 $q_1'$；四边形 $ABU_1V_1$ 变成梯形 $A'B'U_1'V_1'$，而直线 $M_1N_1$ 则变成直线 $M_1'N_1'$，它是这个梯形的对角线的交点和对边交点的连线(图136)。但是在那时 $M_1'N_1'$ 与梯形的底 $A'B'$ 交于它的中点 $Q'$(参看§1问题2)。这就推出问题中的第二个结论。

18. (a) 经过点 $M$ 作一对直线分别交 $l_1$ 和 $l_2$ 于点 $A$，$C$ 和 $B$，$D$(图137)。其次，经过直线 $AD$ 和 $BC$ 的交点 $P$ 作一条直线，它同 $l_1$ 和 $l_2$ 的交点分别以 $K$ 和 $L$ 表示。从问题17

的定理可以推出，$AL$ 和 $DK$ 的交点与$M$的连线$m$经过 $l_1$ 和 $l_2$ 的交点。

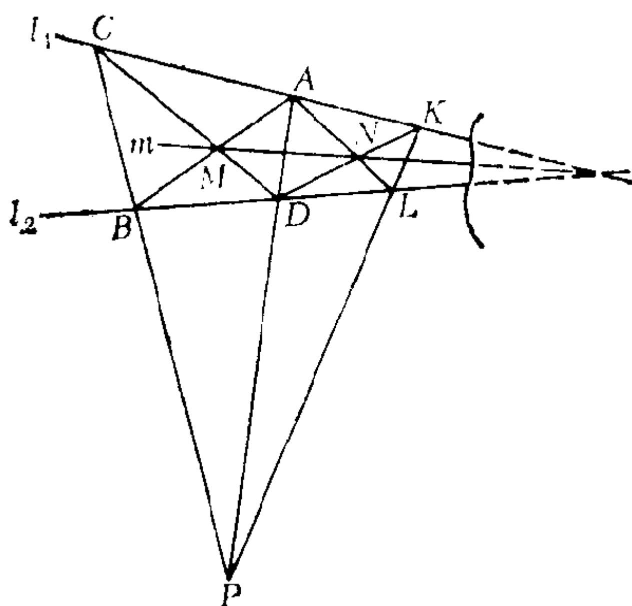



图 137

**注 1** 注意下面这一点是有意思的：如果 $l_1 /\!/ l_2$（这时它们的交点在不存在的意义下是不可达的），则我们的构图归结成问题 3 (b)的构图；即经过给定点$M$只用直尺作一条直线平行于给定的两条平行直线。这不是一个巧合，而是中心射影的性质的一个推论，它使得我们可以将问题 3 (b)看成问题18(a)的一种特殊情形（参看第46页及其后诸页）。还有，在问题18(b)—(d)中的图给出了只用直尺作平行线的方法。我们建议读者争取作出这些图。

**注 2** 问题18(a)的、以问题17(a)中的定理为基础的上述解法，不是唯一可能的解法。根据问题17(b)中的定理的一个解法，示意在图138(a)中。（在这里直线 $l_2$ 和 $MN$ 与直线 $l_1$ 交于同一个点；直线旁边的数字表示作图的次序。）图138(b)表示以问题22中的定理为基础的一种解法。（三角形

$ABM$ 和 $A_1B_1M_1$ 是透视的。附带提一下，由于在图137中的三角形 $CDK$ 和 $BAL$ 是透视的，我们的第一种作图方法也

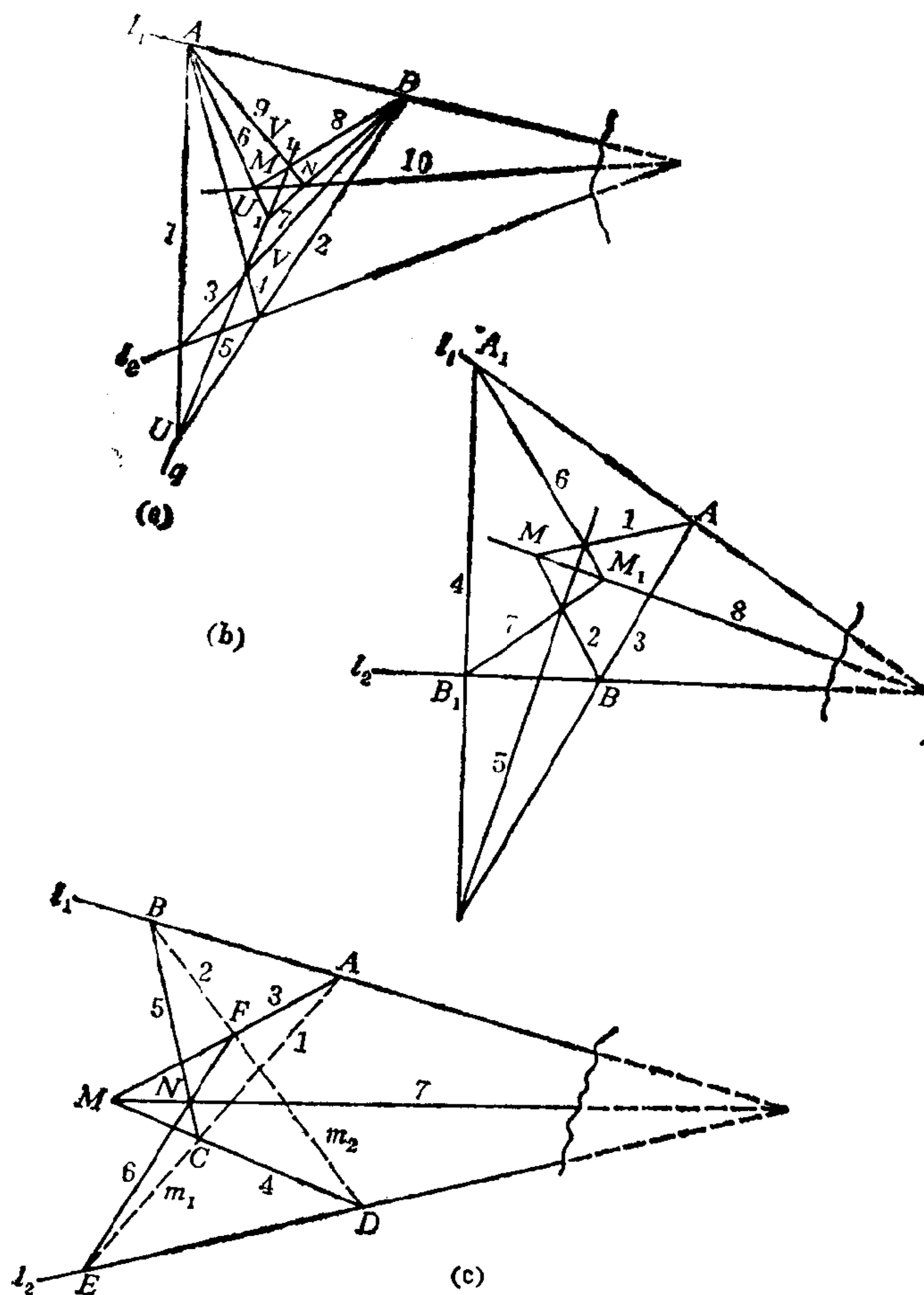



图 138

可以用德札尔格定理证明.）图138(c)表示以问题28(a)的定理为基础的一种作图方法（六边形 $ABCDEF$ 的顶点依次交替地在直线 $m_1$ 和 $m_2$ 上）。这个作图方法也可以用问题28(b)中的定理证明（六边形 $AMDBNE$ 的边依次交替地经过点 $F$ 和 $C$）。问题18(a)还有其它的解法。此外，上面指出的四种作图方法还可以用许多不同的方法证明。

其次，下面给出的问题18(b)—(d)，19，20 的解法也不是唯一可能的解法。建议读者试试去找出其它的作图方法。

(b) 这里是一种可能的作图法：设 $A$ 和 $B$ 是 $m$ 上的两点。从 $A$, $B$, $M$ 到不可达点 $P$ 和 $Q$ 作连线（参看部分(a)的解法）。设 $C$ 和 $D$ 分别是 $AP$ 与 $BQ$，$AQ$ 与 $BP$ 的交点，并设 $E$ 和 $F$ 分别是 $MQ$ 和 $MP$ 与 $CD$ 的交点（图139）。作 $E$ 到 $P$ 和 $F$ 到 $Q$ 的连线，设 $N$ 是 $FQ$ 与 $EP$ 的交点。从问题17(b)中的定理可以推出直线 $MN$, $PQ$, $m$ 交于同一点 $X$。（在图139中，$C$ 和 $D$，$E$ 和 $F$ 是同一直线上的两对点。）

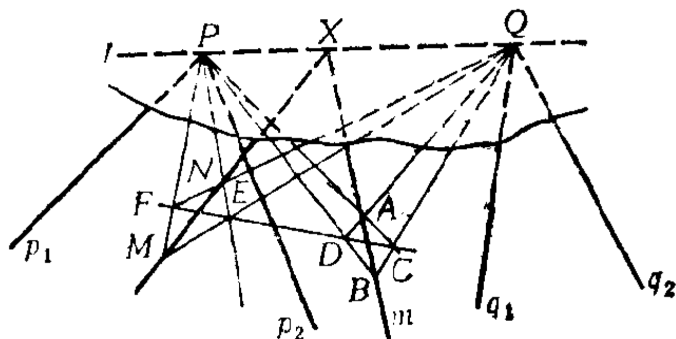


图 139

(c) 下面是一种可能的作图方法：设直线 $p_1, p_2$ 和 $q_1, q_2$ 交于点 $A$, $B$, $C$, $D$（参看图140）。（如果这些直线的交点不在这个作图问题的限制范围之内，我们可以用经过点 $P$ 和 $Q$ 的其它直线来代替；参看问题18(a).）在直线 $AC$ 上（或在与 $BD$ 交于同一点 $E$ 的任何其它直线上）选取两点 $A_1$ 和 $C_1$，使得直线 $A_1B$ 和 $C_1D$, $A_1D$ 和 $C_1B$ 交于问题的限定范围内的点 $P_1$ 和 $Q_1$。由问题17(b)中的定理，直线 $P_1Q_1$ 经过直线 $BD$ 和 $PQ$ 的交

点$F$。剩下只要作$F$到不可达点$P$的连线(参看问题18(a))就可以了。

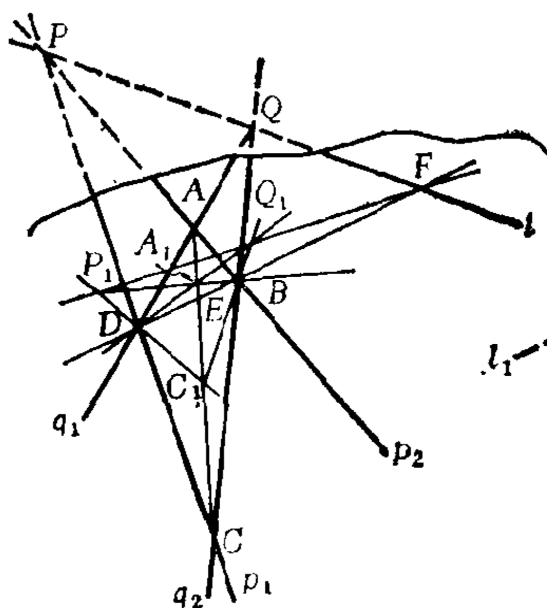



图 140

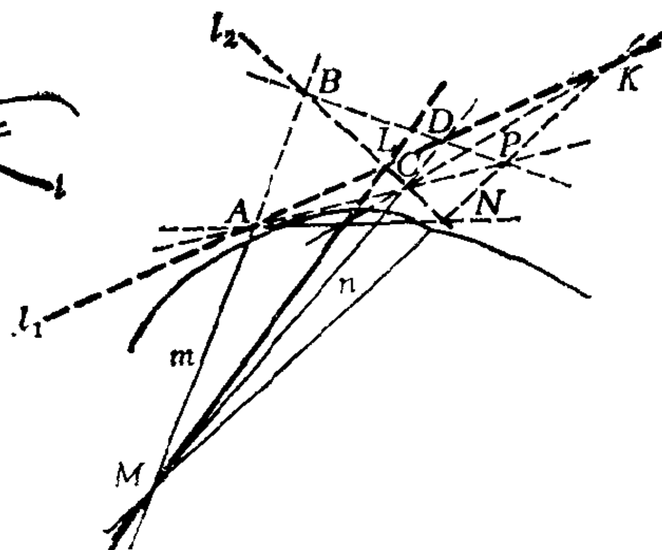



图 141

(d) 下面是一种可能的作图方法：设$m$和$n$是经过点$M$的两条任意直线(图141)。我们知道如何作经过不可达点$A$，$B$，$C$，$D$（它们是$l_1$和$l_2$与$m$和$n$的交点）的直线（问题

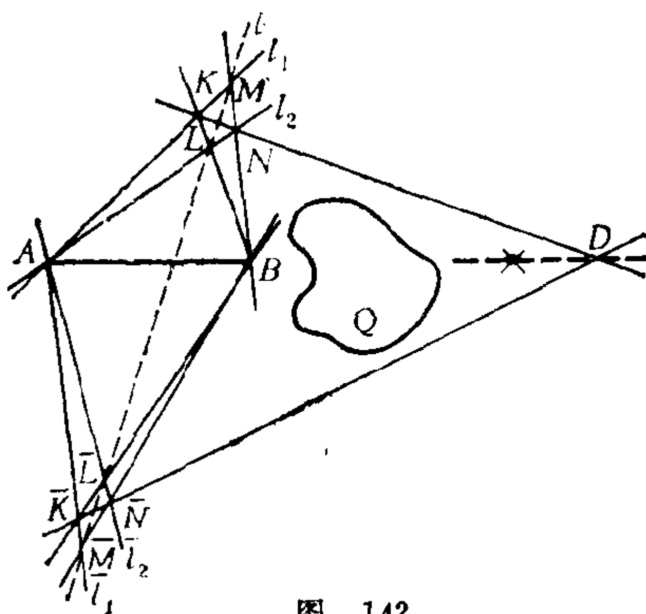



图 142

18(b))。我们也知道如何作 $A$ 到 $C$ 和 $B$ 到 $D$ 的连线（问题18(c))。现在，作 $M$ 到 $AC$ 和 $BD$ 的交点 $P$ 的连线（问题18(a)).设 $MP$ 与 $l_1$ 和 $l_2$ 交于点 $K$ 和 $N$.由问题17(a)中的定理,直线 $KC$ 和 $NA$ 的交点(它能够作出来；参看问题18(b),(c))在所要的直线上。

19．下面是一种可能的作图方法：经过 $A$ 点作两条不通过区域 $Q$ 的直线 $l_1$ 和 $l_2$，经过 $B$ 点作两条直线交 $l_1$ 和 $l_2$ 于点 $K$，$L$ 和 $M$，$N$。用 $l$ 表示直线 $ML$(图142)。其次，经过 $A$ 点再作两条直线 $\bar{l}_1$ 和 $\bar{l}_2$，它们与 $l$ 交于点 $\bar{M}$ 和 $\bar{L}$。设 $B\bar{L}$ 和 $B\bar{M}$ 与 $\bar{l}_1$ 和 $\bar{l}_2$ 分别交于 $\bar{K}$ 和 $\bar{N}$。从问题17(b)中的定理可以推出直线 $KN$ 和 $\bar{K}\bar{N}$ 的交点 $D$ 在直线 $AB$ 上。重复这个过程，可以找到直线 $AB$ 上在区域 $Q$ 右边的另一个点。这两个点使得我们可以越过区域 $Q$ 延长直线 $AB$。

20．下面是一种可能的解法：经过 $A$ 点作两条夹角较小的直线 $l_1$ 和 $l_2$，$B$ 点要在这个角的内部。注意，即使用短的直尺也能将直线段延长。其次，经过 $B$ 点作两条直线与 $l_1$ 和 $l_2$ 分别交于点 $K_1, K_2$ 和 $L_1, L_2$。设 $P$ 是 $K_1L_1$ 和 $K_2L_2$ 的交点。然后从 $P$ 点作若干条直线，它们分别与 $l_1$ 和 $l_2$ 交于点 $K_3, K_4, \cdots, K_n$ 和 $L_3, L_4, \cdots, L_n$(图143)。

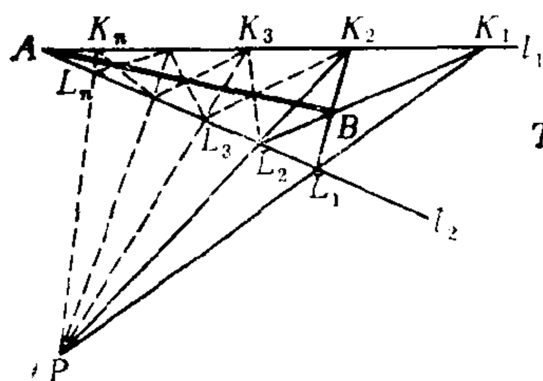



图 143

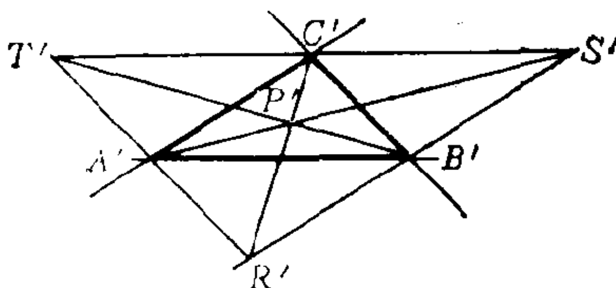
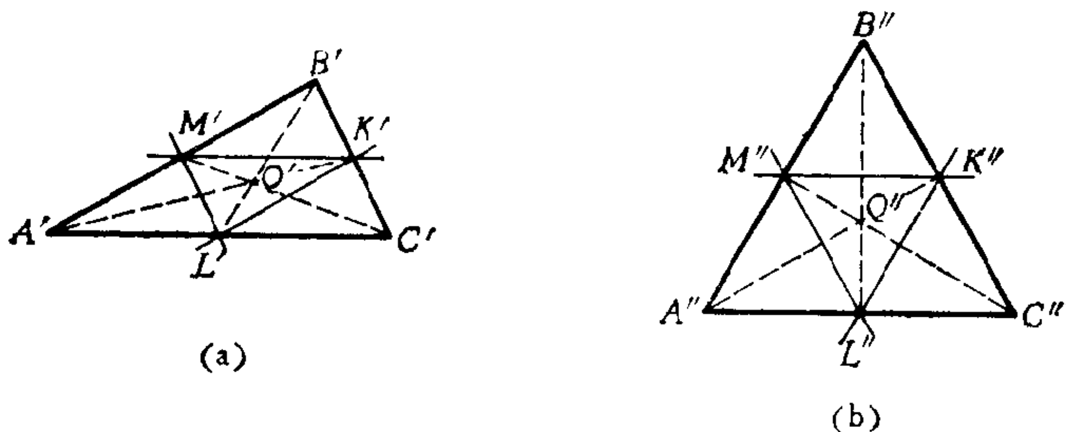



图 144

从问题17(a)中的定理，可以推出 $K_2L_3$ 和 $K_3L_2$，$K_3L_4$ 和 $K_4L_3$，…的交点在直线 $AB$ 上。用这种方法可以作出直线 $AB$ 上的任意稠密的点，它们能够用短的直尺连接起来。

21．用中心射影将图28(a)的平面 $\pi$ 映射到另一个平面 $\pi'$ 上，使得 $p$ 是 $\pi$ 的特殊直线。如此，直线 $AM$ 和 $BC$，$BN$ 和 $AC$，$CL$ 和 $AB$ 分别变成平行直线 $A'M'$ 和 $B'C'$，$B'N'$ 和 $A'C'$，$C'L'$ 和 $A'B'$，而直线 $AS$，$BT$，$CR$ 则分别变成 $\triangle A'B'C'$ 的中线 $A'S'$，$B'T'$，$C'R'$（图144），后者交于一点 $P'$，由此可知 $AS$，$BT$，$CR$ 也交于一点 $P$[1]。




(a)

(b)

图 145

① 注意在从平面 $\pi$ 到平面 $\pi'$ 的中心射影下，三角形 $ABC$ 不一定变成三角形 $A'B'C'$。例如，如果直线 $p$ 穿过三角形内部，则该三角形的象肯定不是三角形；在中心射影下三角形可以变成相当复杂的图形；参看图20。然而，三个点 $A,B,C$ 仍然变成三个点 $A',B',C'$，并且连接 $A,B,C$ 中两个点的直线变成连接 $A',B',C'$ 中两个点的直线。说在一个射影下图28(a)变成图144，就是在这个意义下理解的。为方便计，在图28(a)和图144中我们没有整个地描绘直线 $AB$，$BC$，…和直线 $A'B'$，$B'C'$，…，而是限于画出这些直线上的某个线段。然而，这个问题的解答是以直线变成直线（例如直线 $AB$ 变成直线 $A'B'$）为基础的。将线段 $AB$ 变成线段 $A'B'$ 的说法一般讲是不对的。这个附注也适用于后面许多问题的解答。

此外，在我们的论证中还有其它更加根本的不完善的地方。图144中的点 $P'$ 有可能在平面 $\pi'$ 的特殊直线上。这时直线 $AS,BT,CR$ 不交于一点而是互相平行的。在后面的大部分问题中都可以发现这种不完善的地方。这个问题我们在第46页及其后诸页作了讨论。

(b) 用中心射影将图28(b)的平面 $\pi$ 映射到另一个平面 $\pi'$ 上，使得 $RS$ 是平面 $\pi$ 的特殊直线. 在 $\pi'$ 上我们有 $K'L' /\!/ A'B'$，$K'M' /\!/ A'C'$[图145(a)]。现在用平行射影将 $\triangle A'B'C'$ 映射成一个等边三角形 $A''B''C''$[图145(b)]，这时直线 $A''K''$ 和 $B''L''$ 相交在 $\triangle A''B''C''$ 的对称轴 $C''D$ 上[1]，而直线 $A''K''$ 和 $C''M''$ 交于这个三角形的对称轴 $B''E$ 上。由此可以推出，直线 $A''K''$，$C''M''$，$B''L''$ 的交点 $Q''$ 是两条对称轴的交点，即三角形的形心；而直线 $L''K''$，$K''M''$，$M''L''$ 是三角形的中位线。因此 $L''M'' /\!/ B''C''$。

从平行射影的性质B可以推出 $L'M' /\!/ B'C'$。从性质B还可以推出 $LM$ 和 $BC$ 的交点 $T$ 也在平面 $\pi$ 的特殊直线上，所以 $R, S, T$ 共线。

22. 首先来证明：如果直线 $AA_1$，$BB_1$，$CC_1$ 共点，则直线 $BC$ 和 $B_1C_1$，$CA$ 和 $C_1A_1$，$AB$ 和 $A_1B_1$ 的交点 $P, Q, R$ 共线。为此，将

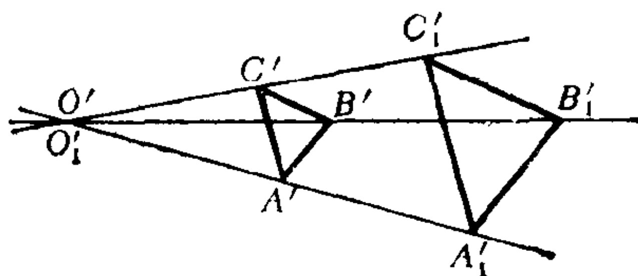



图 146

图29的平面 $\pi$ 射影到平面 $\pi'$ 上，使得 $QR$ 是 $\pi$ 的特殊直线。于是由中心射影的性质B，有 $A'B' /\!/ A_1'B_1'$ 和 $A'C' /\!/ A_1'C_1'$。从 $C'A' /\!/ C_1'A_1'$ 可推出 $O'C'/O'C_1' = O'A'/O'A_1'$，又从 $A'B' /\!/ A_1'B_1'$ 可推出 $O'A'/O'A_1' = O'B'/O'B_1'$；所以 $O'B'/O'B_1' = O'C'/O'C_1'$。因此直线 $B'C'$ 和 $B_1'C_1'$ 平行，从而 $BC$ 和 $B_1C_1$ 的交点 $P$ 落在 $\pi$ 的特殊直线上，即点

[1] 它们在对直线 $C''D$ 的反射下互相变换。——英译者

$P, Q, R$ 共线。

现在来证明上述论断的逆。为此将图29的平面 $\pi$ 射影到平面 $\pi'$ 上，使得包含 $P, Q, R$ 的直线成为 $\pi$ 的特殊直线。在这个射影下，三角形 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 变成对应边平行的相似三角形 $A'B'C'$ 和 $A_1'B_1'C_1'$（图146）。设 $O'$ 是 $A'A_1'$ 和 $B'B_1'$ 的交点，$O_1'$ 是 $A'A_1'$ 和 $C'C_1'$ 的交点。则有 $O'A'/O'A_1' = A'B'/A_1'B_1'$ 和 $O_1'A'/O_1'A_1' = A'C'/A_1'C_1'$。另一方面，从三角形 $A'B'C'$ 和 $A_1'B_1'C_1'$ 的相似性，可以推出 $A'B'/A_1'B_1' = A'C'/A_1'C_1'$。因此 $O'A'/O'A_1' = O_1'A'/O_1'A_1'$，即两个点 $O'$ 和 $O_1'$ 重合。由于直线 $A'A_1', B'B_1', C'C_1'$ 共点，所以直线 $AA_1, BB_1$，$CC_1$ 也共点。

注意，问题22中的第二个结论可以由第一个推出。事实上，设图29中的点 $P, Q, R$ 共线，即三角形 $PB_1B$ 和 $QA_1A$ 的对应顶点的连线 $PQ, B_1A_1, BA$ 交于一点 $R$。由问题22的第一个结论，这两个三角形的对应边的交点 $C_1$，$C$ 和 $O$ 共线（这里 $O$ 是直线 $AA_1$ 和 $BB_1$ 的交点）。这就说明 $CC_1$ 经过 $O$ 点，即直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 共点。

用类似的方法也可以从德札尔格定理的第二个结论得到第一个结论。

23. 这个问题的结论只是德札尔格定理（问题22；三角形 $AEH$ 和 $CFG$ 是透视的）的另一种形式。

24. (a) 经过 $P$ 点作一直线，它同 $\triangle ABC$ 的边 $AB$ 和 $BC$ 的交点用 $Z_1$ 和 $Y_1$ 表示。直线 $QY_1$ 和 $RZ_1$ 的交点记作 $X_1$ [图147(a)]。

现在假设我们的问题已经解决，即所要的 $\triangle XYZ$ 已经作出来。注意，这时三角形 $X_1Y_1Z_1$ 和 $XYZ$ 是透视的（它们的对应边的交点 $P, Q, R$ 共线）。由此直线 $XX_1, YY_1, ZZ_1$

图 147

交于一点(参看问题22)，并且交点就是$B$.作连接$B$和$X_1$的直线，$BX_1$和$AC$的交点就是我们的三角形的一个顶点$X$。至此作出其余的顶点就不会有困难了.

(b) 首先证明：如果变动一个$n$角形，使得它的边经过某一直线$l$上的$n$个定点，而它的$n-1$个顶点沿给定的$n-1$条直线滑动，则由第$n$个顶点所描出的轨迹是一条直线。为说明这一点，只要将我们的图形射影到新的平面$\pi'$上，使得$l$是$\pi$的特殊直线，并利用《几何变换》第二册的问题10(b)中所建立的结果（例如，参看问题17(a)的解答）。然后仿照《几何变换》第二册的问题10(c)中所使用的作图方法，就可以得到所需要的作图方法.

(c) 经过$A$点作一直线，分别与$l_1$和$l_2$交于点$X_1$和

$Y_1$。从直线 $Y_1B$ 和 $l_3$ 的交点 $Z_1$ 到 $X_1$ 作连线。现在假设问题已经解决，即 $\triangle XYZ$ 已经作出来[图147(b)]。由于直线 $XX_1, YY_1, ZZ_1$ 交于 $O$ 点，三角形 $XYZ$ 和 $X_1Y_1Z_1$ 透视，因此直线 $X_1Y_1$ 和 $XY$ 的交点（即 $A$ 点），$Y_1Z_1$ 和 $YZ$ 的交点（即 $B$ 点），$ZX_1$ 和 $ZX$ 的交点共线。因为直线 $ZX$ 和 $Z_1X_1$ 的交点 $C'$ 与直线 $Z_1X_1$ 和 $AB$ 的交点重合，所以我们不难找到点 $C'$。要找的三角形的边 $ZX$ 在点 $C'$ 和 $C$ 的连线上。

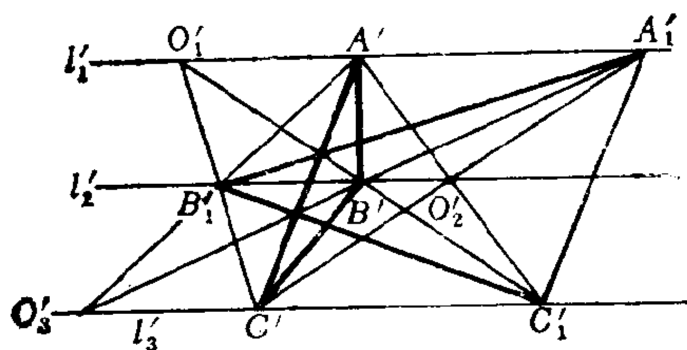
25. 这个定理同问题28中陈述的定理只有说法上的差别；点 $C, B_1$ 以及 $A_1B$ 与 $AC_1$ 的交点 $O_2$，分别是四边形 $A_1OO_1C_1, OO_1BA, A_1C_1BA$ 的对角线的交点。

26. 用中心射影将图31的平面 $\pi$ 映射到平面 $\pi'$，使得 $\pi$ 的特殊直线是 $AC$ 和 $A_1C_1$ 的交点到 $O$ 点的连线。在这个映射下，三角形 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 变成三角形 $A'B'C'$ 和 $A_1'B_1'C_1'$，对它们有 $A'A_1' \parallel B'B_1' \parallel C'C_1', A'C' \parallel A_1'C_1'$。直线 $A'A_1'$, $B'C_1', C'B_1'$ 交于一点 $O_1'$，直线 $A'C_1', B'B_1', C'A_1'$ 交于一点 $O_2'$[图148(a)]。用 $l_1', l_2', l_3'$ 依次表示平行直线 $A'A_1'$, $B'B_1', C'C_1'$。由于 $A'C_1'$ 和 $C'A_1'$ 是平行四边形 $A'C'C_1'A_1'$ 的对角线，并由于 $B'B_1'$ 经过这两条对角线的交点，可以知道直线 $B'B_1'$（即 $l_2'$）与 $l_1'$ 和 $l_3'$ 等距离。下面来证明 $A'B_1'$, $B'A_1', C'C_1'$ 交于一点。随之就可以知道 $AB_1, BA_1, CC_1$ 也交于一点。

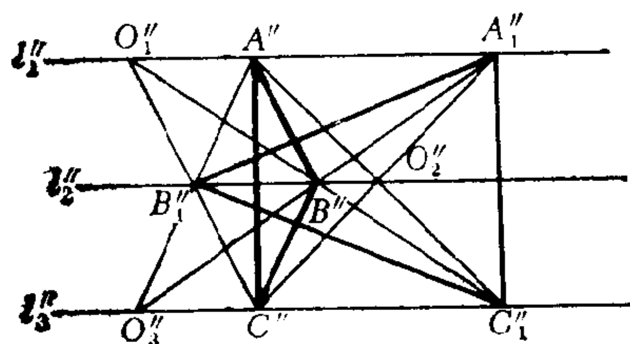
用平行射影将平面 $\pi'$ 映射到平面 $\pi''$ 上，使 $\triangle A'C'C_1'$ 变成直角三角形 $A''C''C_1''$①。则图148(a)变成图148(b)，后者以 $l_2''$ 为对称轴。由此可以推出直线 $A''B_1''$ 和 $B''A_1''$ 交在

① 如果我们利用定理1（第56页），则可以用一个中心射影来代替上面所用的两个射影（先是中心射影，后是平行射影），使得四边形 $ACC_1A_1$ 变成一个矩形（例如，一个正方形）。

直线 $C''C_1''$ 上的一点 $O_3''$，它同 $O_1''$ 关于 $l_2''$ 对称。因此，图148(a)中的直线 $A'B_1'$, $B'A_1'$, $C'C_1'$ 交于一点 $O_3'$（$O_3'$ 是 $\pi'$ 上的点，它在上述平行射影下映射到 $O_3''$ 上）。




(a)




(b)

图 148

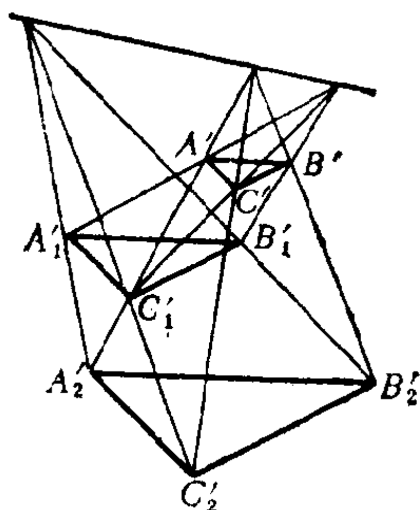



图 149

27. 把三个三角形所在的平面 $\pi$ 射影到平面 $\pi'$ 上，使得 $PQR$ 是 $\pi$ 的特殊直线。在此射影下三角形 $ABC$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 变为成对地中心相似的三角形 $A'B'C'$, $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$（参看问题22的解答），并且三组直线 $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$；$AA_2$, $BB_2$, $CC_2$；$A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ 的三个交点分别变成这些三角形的相似中心。根据关于三相似中心的定理（参看《几何变换》第二册，第一章，§1），这三个点共线（图149）。因此，在我们的射影下这些点的原象也共线。

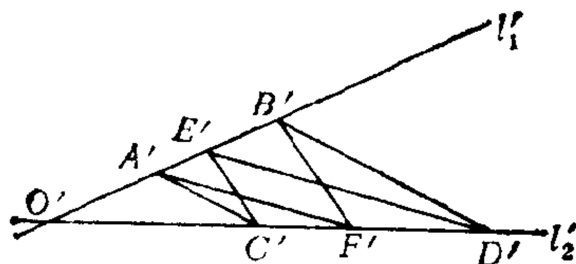



图 150

28. 设 $M,N,P$ 依次是直线 $AF$ 和 $ED$，$EC$ 和 $BF$，$AC$ 和 $BD$ 的交点；$O$ 是 $AB$ 和 $CD$ 的交点。把图33的平面 $\pi$ 射影到平面 $\pi'$ 上，使得 $MN$ 是 $\pi$ 的特殊直线。在这个映射下，图33变成图150，其中 $A'F' \parallel D'E'$，$B'F' \parallel C'E'$。从直线 $A'F' \parallel D'E'$ 可以推出 $O'A'/O'E' = O'F'/O'D'$，从直线 $B'F' \parallel C'E'$ 又可推出 $O'E'/O'B' = O'C'/O'F'$。把这两个等式相乘得到 $O'A'/O'B' = O'C'/O'D'$。由此可知直线 $A'C' \parallel B'D'$，即 $P$ 在平面 $\pi$ 的特殊直线 $MN$ 上（在 $l_1' \parallel l_2'$（图150中的记号）这种比较简单的情形，留给读者考虑）。

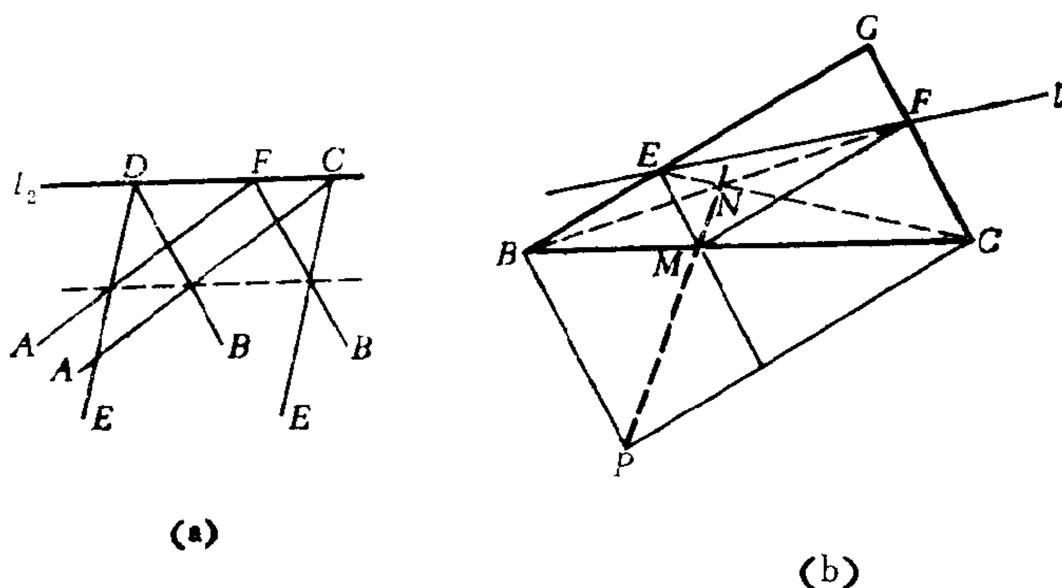



图 151

29．(i)设$D,F,C$是直线$l$上的三个点．过这些点作直线$DB\parallel FB,DE\parallel CE,FA\parallel CA$（图151(a)．这里$A,B,E$是无穷远点）．则$DE$和$FA,DB$和$CA,FB$和$CE$的交点共线（为什么？）．

(ii) 设直线$l$与$\triangle BCG$的边$BG$和$CG$交于点$E$和$F$[图151 (b)]，则四边形$BCEF$的对角线的交点$N$与平行四边形$BGCP$和$EGFM$的顶点$P$和$M$共线（为什么？）．

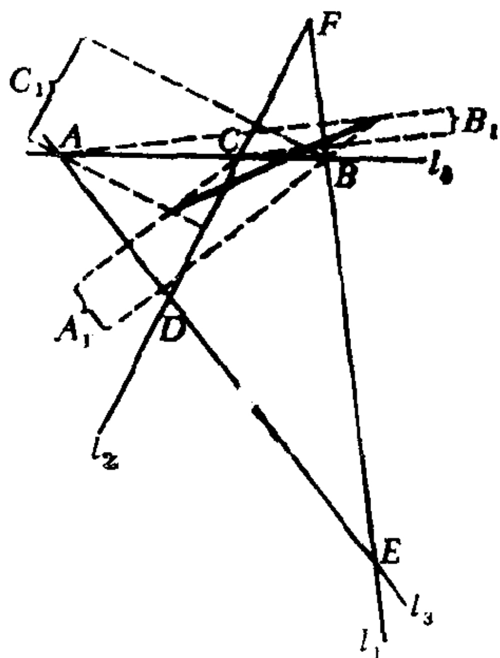



图 152

30．设$l_1,l_2,l_3$和$l_4$是四条给定的直线，$A,B,C,D,E,F$是它们的交点（参看图152）．

考虑由它们构成的四个三角形中的三个，例如三角形$ABE,ACD,BCF$，其中各个三角形的高线的交点分别是直线$AB_1\perp l_1$和$BA_1\perp l_3$的交点，$AC_1\perp l_2$和$CA_1\perp l_3$的交点，$BC_1\perp l_2$和$CB_1\perp l_1$的交点．从上题部分(i)的结果，可以知道这些点共线．对于这四个三角形中的任意三个都可以作出类似的结论．所以，所有这四个垂心共线．

31．问题23等价于德札尔格定理（问题22），问题31(i)

和(ii)等价于德札尔格定理的某些特殊情形。其证明留给读者。

32. (a) 经过这个平行四边形的顶点$B$作直线$BN' \parallel MD$($N'$在对角线$AC$上，参看图153(a))。由于$NM \parallel N'B$，我们有$AN'/AN = AB/AM = n$。此外，从$\triangle ADN$和$\triangle CBN'$全等可以推出$AN = CN'$，由此

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN' + N'C}{AN} = n + 1.$$

这就是我们所要证的。

如果将图153(a)射影到另一个平面上，使$AB$与原来平面的特殊直线平行，则在直线$AB$上的线段之比保持不变(参看第45页)。然而，这个射影不保持对角线$AC$上线段之比。所以，为了得到刚才所证结果的另一种形式，必须把它改写，以消除$AC$上的线段之比而只保留$AB$上的线段之比。为此，最简单的办法是经过点$N$作直线$NM_1 \parallel DA$ ($M_1$在边$AB$上)。从刚才所证明的定理可以推出：如果$AM = (1/n)AB$，则

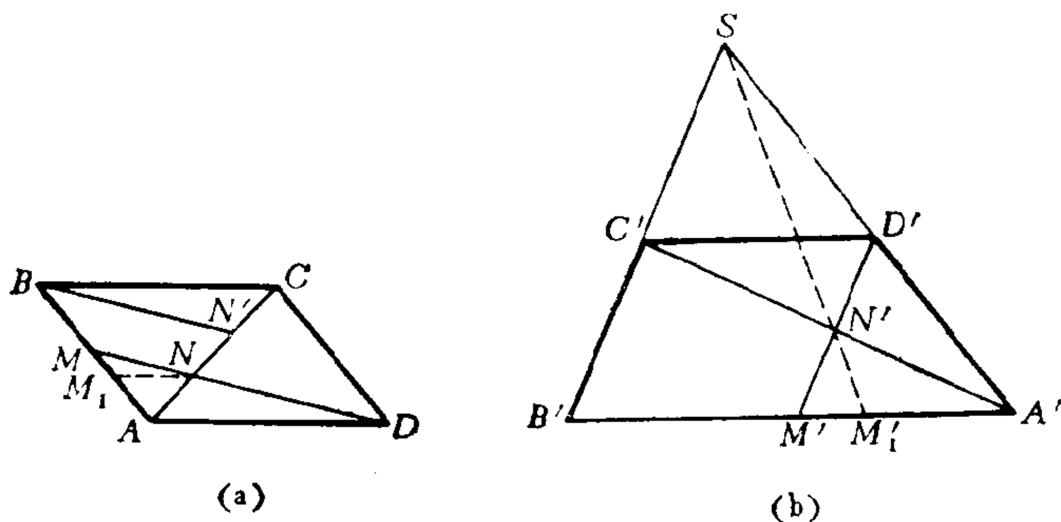



图 153

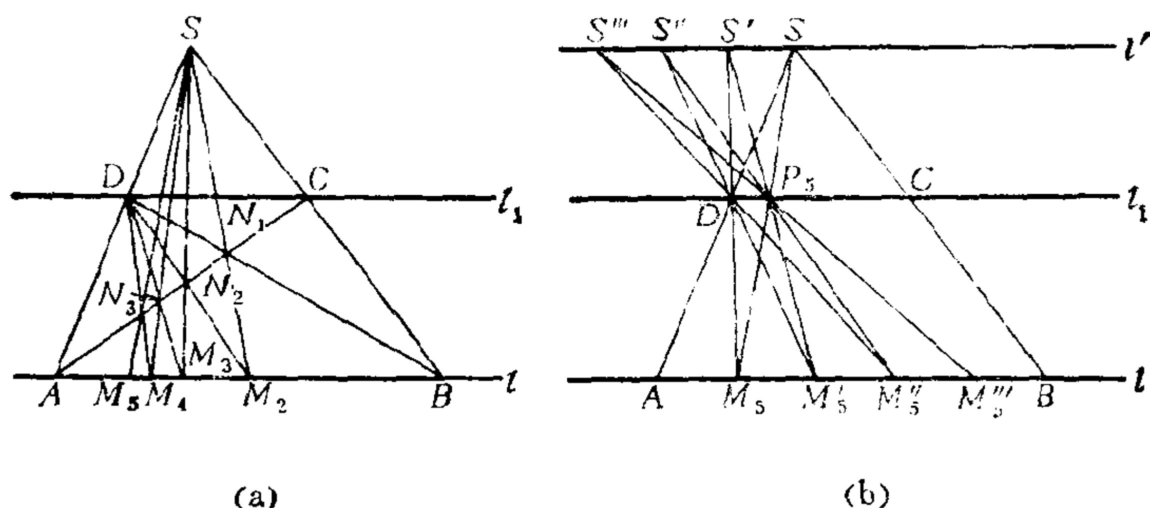
$$AM_1=\frac{1}{n+1}AB.$$

至此，从我们的射影显然可以得到下列结果：假若一点 $M'$ 分梯形 $A'B'C'D'$ 的底 $A'B'$ 之比为 $A'M'/A'B'=1/n$，则从该梯形的（不平行）对边的交点 $S$ 到 $D'M'$ 与对角线 $A'C'$ 的交点 $N'$ 的连线，与 $A'B'$ 交于一点 $M_1'$，它使得

$$A'M_1'=\frac{1}{n+1}A'B'$$

［图153(b)］。（由于直线 $AB$ 和 $CD$ 平行于该平面的特殊直线，在上述射影下它们的象保持平行。这说明平行四边形 $ABCD$ 变成梯形 $A'B'C'D'$，平行线 $AD, BC, M_1N$ 变成交于一点 $S$ 的直线 $A'D', B'C', M_1'N'$。在射影下保持与该平面的特殊直线平行的直线 $AB$ 上的线段之比。）

(b) 从平面上的任意一点 $S$ 到点 $A$ 和 $B$ 分别作连线，设 $D$ 和 $C$ 是直线 $SA$ 和 $SB$ 同 $l_1$ 的交点。如果 $N_1$ 是 $DB$ 和 $AC$ 的交点，则 $SN_1$ 与 $AB$ 的交点 $M_2$ 使得 $AM_2=AB/2$（参看问题 2 之解答）。进一步，如果 $DM_2$ 与 $AC$ 交于点 $N_2$，则




(a) (b)

图 154

$SN_2$与$AB$的交点$M_3$使得$AM_3=AB/3$；如果$DM_3$与$AC$交于点$N_3$，则$SN_3$与$AB$的交点$M_4$使得$AM_4=AB/4$，等等（图154(a)，参看问题32(a)之解)。

（一旦确定了使得$AM_n=(1/n)AB$的点$M_n$，就容易发现分线段$AB$为$n$等分的其它的点。事实上，经过$S$作与$l$和$l_1$平行的直线$l'$（参看问题3(b))，如果$SM_n$与$DC$交于点$P_n$，$M_nD$与$l'$交于点$S'$，而$S'P_n$与$AB$交于点$M'_n$，则$AM_n=M_nM'_n$，所以$AM'_n=(2/n)AB$，等等；参看图154(b)，其中$n=5$。)

33．将图14的平面$\pi$射影到平面$\pi'$上，使得直线$ABE$是平面$\pi$的特殊直线，则图14变成图155。完全四边形的对角线$CA,DB,FE$分别变成直线$C'A'\parallel F'D'$，$D'B'\parallel F'C'$，$F'E'\parallel D'C'$。这些直线的交点以$C_1,D_1,F_1$表示（参看图155)。显然，点$C',D',F'$是三角形$C_1D_1F_1$的边的中点。

下面我们要确定这个完全四边形的对角线的中点$P,Q,R$的象。线段$CA$的中点$P$是使得$AP/CP=-1$的点。如果$P_1$表示直线$CA$的无穷远点，则有

$$\frac{AP/CP}{AP_1/CP_1}=-1.$$

由中心射影的性质C，有

$$\frac{A'P'/C'P'}{A'P'_1/C'P'_1}=-1,$$

其中$P'_1$是无穷远点$P_1$的象，即是$C'A'$同平面$\pi'$的特殊直线$l$的交点。把上述等式改写成

$$\frac{C'P'_1/C'P'}{A'P'_1/A'P'}=-1,$$

由于 $A'P_1'/A'P'=1$（$A'$是无穷远点），又可改写成

$$\frac{C'P_1'}{C'P'}=-1.$$

由此可以推出 $C'$ 是线段 $P'P_1'$ 的中点，即 $P'$ 同直线 $D_1F_1$ 与 $l$ 的交点 $P_1'$ 关于 $\triangle C_1D_1F_1$ 的边 $D_1F_1$ 的中点 $C'$ 对称。

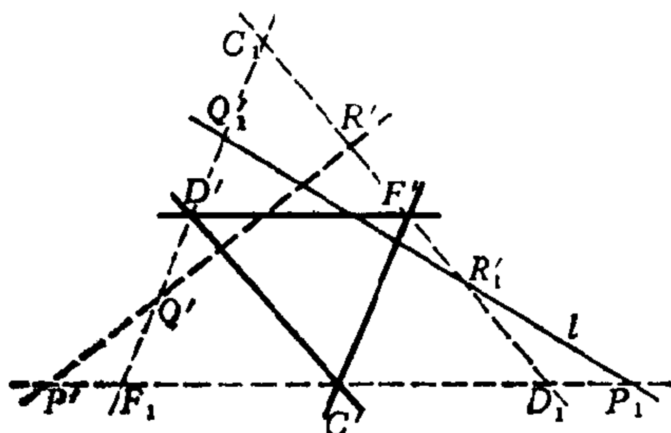



图 155

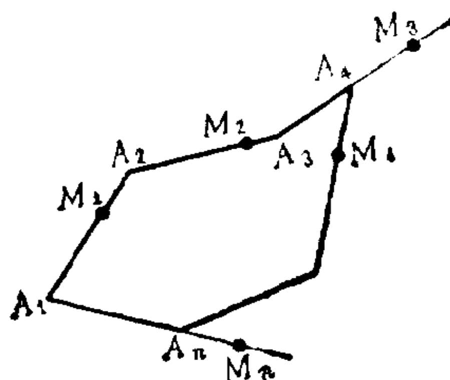



图 156

类似地，我们可以证明，这个完全四边形的对角线 $DB$ 和 $FE$ 的中点 $Q$ 和 $R$ 被映射到点 $Q'$ 和 $R'$，它们分别同 $\triangle C_1D_1F_1$ 的边 $C_1F_1$ 和 $C_1D_1$ 与特殊直线 $l$ 的交点 $Q_1'$ 和 $R_1'$ 关于这些边的中点 $D'$ 和 $F'$ 对称。于是，关于完全四边形的这个定理（断定点 $P$，$Q$，$R$ 共线）可以叙述如下：设 $P_1'$，$Q_1'$，$R_1'$ 是直线 $l$ 同三角形 $C_1D_1F_1$ 的边的交点，则它们在关于这个三角形的对应边的中点的反射下的象 $P'$，$Q'$，$R'$ 共线。这个定理是问题 9(a) 中的定理的特殊情形，并且可以用来推出关于完全四边形的定理。

**34.** 我们将证明梅内劳斯定理和塞瓦定理是下述定理的直接推论。在解问题34之前先证明这个定理。设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个任意多边形，$M_1,M_2,\cdots,M_n$ 是它的边或边的延长线上的点（图156）。我们要证明乘积

(#) $$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

在中心射影下保持不变。实际上，如果 $A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$ 和 $M'_1, M'_2, \cdots, M'_n$ 分别是点 $A_1, A_1, \cdots, A_n$ 和 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 在以 $O$ 为中心的中心射影下的象，则由第43页中的公式(*)，有

$$A'_1M'_1/A'_2M'_1=(A_1M_1/A_2M_1)(OA'_1/OA_1)(OA'_2/OA_2),$$
$$A'_2M'_2/A'_3M'_2=(A_2M_2/A_3M_2)(OA'_2/OA_2)(OA'_3/OA_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A'_nM'_n/A'_1M'_n=(A_nM_n/A_1M_n)(OA'_n/OA_n)(OA'_1/OA_1).$$

把这些等式乘起来，可以得到

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1}\cdot\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n}$$

$$=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n},$$

这就是我们所要证明的结果。

这个定理可以看成中心射影的性质C的一个推广（如果多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 退化成两边形 $ABA$，它就成为性质C）。

下面来说明从它如何推出梅内劳斯定理和塞瓦定理。

(a)将 $\triangle ABC$ 的平面 $\pi$ 射影到平面 $\pi'$ 上，使得直线 $MN$ 是 $\pi$ 的特殊直线。假若点 $M, N, P$ 在直线 $l$ 上，则 $l$ 将变成无穷远直线，而 $M, N, P$ 则变成点 $M', N', P'$，它们分别是直线 $A'B', B'C', C'A'$ 上的无穷远点。因此有

$$\frac{A'M'}{B'M'}=1, \quad \frac{B'N'}{C'N'}=1, \quad \frac{C'P'}{A'P'}=1$$

和

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=1.$$

由此，从上面所证明的定理来看，乘积$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)$的值也是1.

反之，设$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=1$，由于上述射影把$M,N$变成无穷远点$M',N'$，可以推出$A'M'/B'M'=1$和$B'N'/C'N'=1$。从上面得到的结果，必有$(A'M'/B'M')(B'N'/C'N')(C'P'/A'P')=1$，所以$C'P'/A'P'=1$，它说明$P'$是直线$A'C'$上的无穷远点，从而$P$必在$\pi$的特殊直线上。这就证明了$M,N,P$在一条直线上。

**注** 用类似的论证可以证明下列更一般的定理：设$M_1,M_2,\cdots,M_n$是$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$同直线$l$的交点，则

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1.$$

然而，当$n>3$时从这个等式不能推出$M_1,M_2,\cdots,M_n$是共线的。

(b) 将$\triangle ABC$的平面$\pi$射影到平面$\pi'$上，使得$MN$是$\pi$的特殊直线。如果直线$AN,BP,CM$交于一点$O$或互相平行，则平面$\pi$上的图44变成图157，且$A'N'\parallel B'C'$，$C'M'\parallel B'A'$。因此点$P'$是$A'C'$的中点（由于它是平行四边形$A'B'C'O'$的对角线的交点）。如此我们有$A'M'/B'M'=1$，$B'N'/C'N'=1$（由于$M'$和$N'$是无穷远点）和$C'P'/A'P'=-1$。由此可得

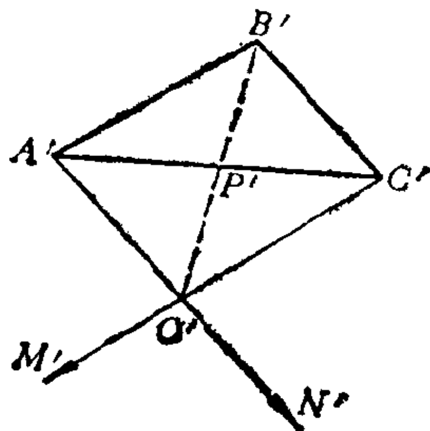


图 157

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=-1,$$

所以从上面证明的结果，有

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1.$$

反之，假设上面这个等式成立. 由于在我们的射影下点$M$和$N$变成无穷远点，有$A'M'/B'M'=1$和$B'N'/C'N'=1$，因此$C'P'/A'P'=-1$，即$P'$是$A'C'$的中点. 所以直线$A'N'\parallel B'C'$，$C'M'\parallel B'A'$，$B'P'$交于一点$O'$（参看图157）. 由此可知直线$AN$，$CM$和$BP$也交于一点或平行.

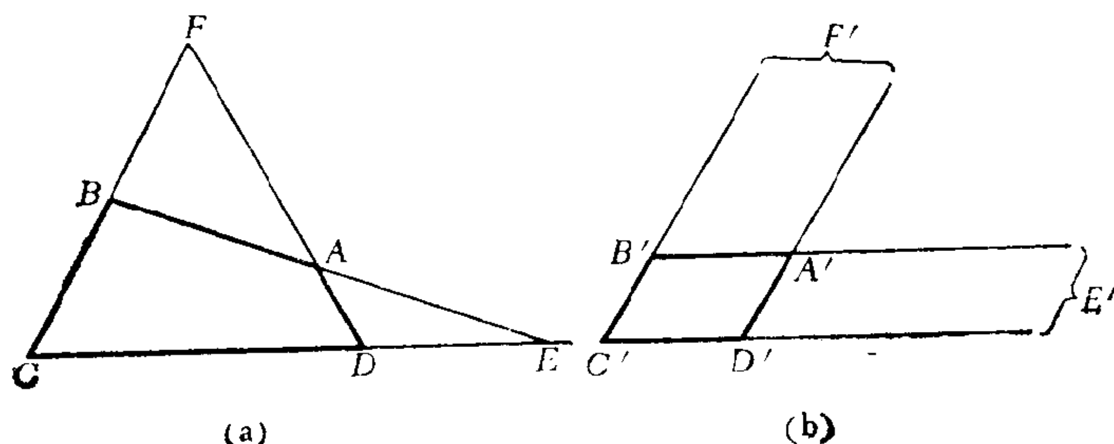



图 158

35. 我们必需证明（参看图158）

$$\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF}=1.$$

注意，左边的表达式可以看成第209页中公式（#）的特殊情形，其中四边形$ABCD$起图156中$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的作用，而点$E,F,E,F$（按其次序）相当于点$M_1,M_2,\cdots,M_n$. 由此

可知表达式 $(AE/BE)(BF/CF)(CE/DE)(DE/AF)$ 在中心射影下不变。注意，图158(a) 的平面 $\pi$ 在以 $EF$ 为它的特殊直线的中心射影下，图158(a)变成图158(b)。由于 $E',F'$ 是无穷远点，我们有

$$\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{B'F'}{C'F'}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{D'F'}{A'F'}=1.$$

因此

$$\frac{A'E'}{B'E'}\cdot\frac{B'F'}{C'F'}\cdot\frac{C'E'}{D'E'}\cdot\frac{D'F'}{A'F'}=1$$

$$\left(=\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF}\right).$$

这就证明了我们的定理。

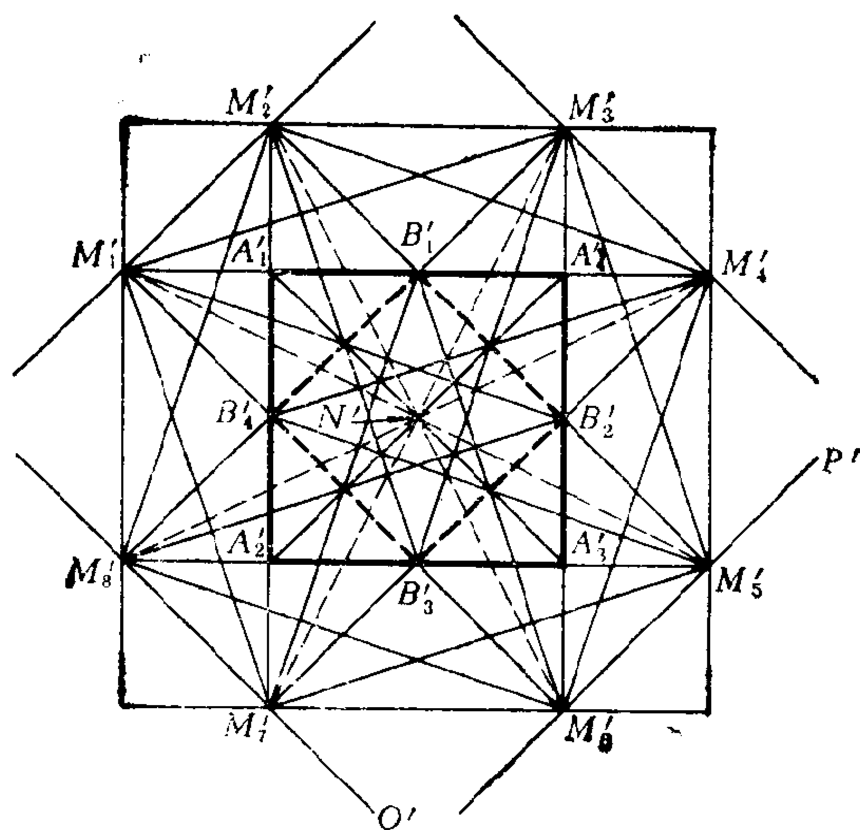



图 159

36. 将四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 射影到一个正方形 $A'_1A'_2A'_3A'_4$

上（参看第56页定理1）。在这个射影下点$P$和$Q$变成与这个正方形的边的方向对应的无穷远点；直线$PN$和$QN$变成这个正方形的中线；点$B_1, B_2, B_3, B_4$变成正方形的边的中点$B'_1, B'_2, B'_3, B'_4$；点$M_1, M_2, \cdots, M_8$变成点$M'_1, M'_2, \cdots, M'_8$（图159）。从下列相当明显的事实就可以推出我们的定理的结论：

(a) 点$M'_1$和$M'_5$，$M'_2$和$M'_6$，$M'_3$和$M'_7$，$M'_4$和$M'_8$关于正方形的中心$N'$对称，因此直线$M'_1M'_5$，$M'_2M'_6$，$M'_3M'_7$，$M'_4M'_8$交于点$N'$。

(b) 直线$M'_2M'_3$和$M'_6M'_7$平行于$A'_2A'_3$；直线$M'_1M'_8$和$M'_4M'_5$平行于$A'_1A'_2$。

(c) 直线$M'_1M'_2, M'_3M'_8, M'_4M'_7, M'_5M'_6$与这个正方形的对角线$A'_2A'_4$平行，而直线$M'_3M'_4, M'_2M'_5, M'_1M'_6, M'_7M'_8$与另一条对角线$A'_1A'_3$平行。

(d) $$M'_1M'_3 \parallel M'_5M'_7 \parallel B'_4M'_4 \parallel B'_2M'_8;$$

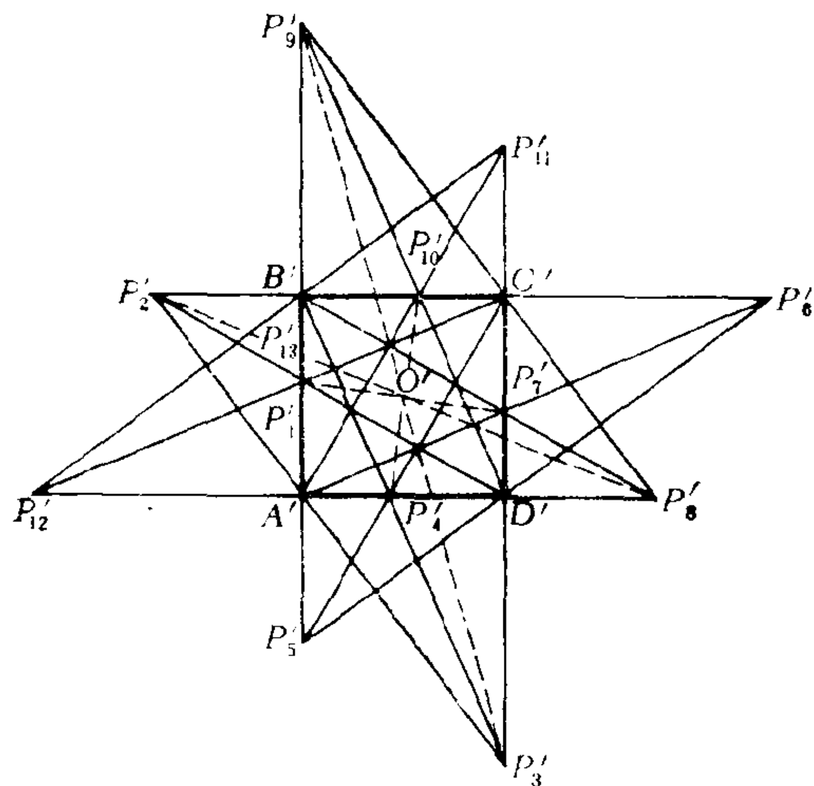



图 160

$$M'_2M'_4 \parallel M'_6M'_8 \parallel B'_4M'_5 \parallel B'_2M'_1;$$

$$M'_3M'_5 \parallel M'_1M'_7 \parallel B'_1M'_6 \parallel B'_3M'_2;$$

$$M'_4M'_6 \parallel M'_2M'_8 \parallel B'_1M'_7 \parallel B'_3M'_3.$$

37. 将四边形$ABCD$ 射影到正方形 $A'B'C'D'$，并设点$P_1, P_2, P_3, \cdots$变成点 $P'_1, P'_2, P'_3, \cdots$ (图160)。这些点在这正方形的各边上的位置确定一组比值，我们以

$$\lambda_1 = \frac{A'P'_1}{B'P'_1}, \quad \lambda_2 = \frac{B'P'_2}{C'P'_2}, \quad \lambda_3 = \frac{C'P'_3}{D'P'_3}, \quad \cdots$$

表示；注意它们可以是正或负的。从$\triangle A'D'P'_1 \backsim \triangle B'P'_2P'_1$ (图160)可以推出

$$\frac{D'A'}{B'P'_2} = -\frac{A'P'_1}{B'P'_1},$$

所以

$$\frac{C'P'_2}{B'P'_2} = \frac{C'B' + B'P'_2}{B'P'_2} = \frac{C'B'}{B'P'_2} + 1$$

$$= \frac{D'A'}{B'P'_2} + 1 = -\frac{A'P'_1}{B'P'_1} + 1.$$

于是

$$\frac{1}{\lambda_2} = -\lambda_1 + 1,$$

或

(*) $$\lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1}.$$

如果点$P'_1$在边$A'B'$的$A'$或$B'$外的延长线上，容易验证公式(*)仍然成立。

用公式(*)我们可以发现：

$$\lambda_2=\frac{1}{1-\lambda_1},\quad \lambda_3=\frac{1}{1-\lambda_2}=1-\frac{1}{\lambda_1},\quad \lambda_4=\frac{1}{1-\lambda_3}=\lambda_1,$$

$$\lambda_5=\frac{1}{1-\lambda_4}=\lambda_2,\qquad \lambda_6=\frac{1}{1-\lambda_5}=\lambda_3,\ \text{等等},$$

即

$$\lambda_1=\lambda_4=\lambda_7=\lambda_{10}=\lambda_{13}=\lambda_{16}=\cdots,$$

$$\lambda_2=\lambda_5=\lambda_8=\lambda_{11}=\lambda_{14}=\lambda_{17}=\cdots=\frac{1}{1-\lambda_1},$$

$$\lambda_3=\lambda_6=\lambda_9=\lambda_{12}=\lambda_{15}=\lambda_{18}=\cdots=1-\frac{1}{\lambda_1}.$$

至此不难推出我们定理的结论。

(a) $\lambda_1=\lambda_{13}$说明点$P'_{13}$和点$P'_1$重合。从中心射影的1－1性质可以推出$P_{13}$和$P_1$重合。

(b) 从$\lambda_1=\lambda_7$，$\lambda_2=\lambda_8$，$\lambda_3=\lambda_9$，等等，可以推出点$P'_1$与$P'_7$，$P'_2$与$P'_8$，$P'_3$与$P'_9$关于这个正方形的中心$O'$对称，即直线$P'_1P'_7, P'_2P'_8, P'_3P'_9$等等都交于点$O'$。因此，根据中心射影的性质，直线$P_1P_7, P_2P_8, P_3P_9$等等都经过四边形$ABCD$的对角线的交点。

(c) 直线$P'_1P'_2$和$P'_7P'_8$, $P'_2P'_3$和$P'_8P'_9$，$P'_3P'_4$和$P'_9P'_{10}$等等关于这个正方形的中心$O'$对称（参看上面的(b)），所以它们分别是平行的。根据中心射影的性质，可以推出直线$P_1P_2$和$P_7P_8$，$P_2P_3$和$P_8P_9$，$P_3P_4$和$P_9P_{10}$等等两两相交在四边形$ABCD$的对边交点$S$和$S_1$的连线上（在这个射影下直线

$SS_1$变成无穷远直线)。

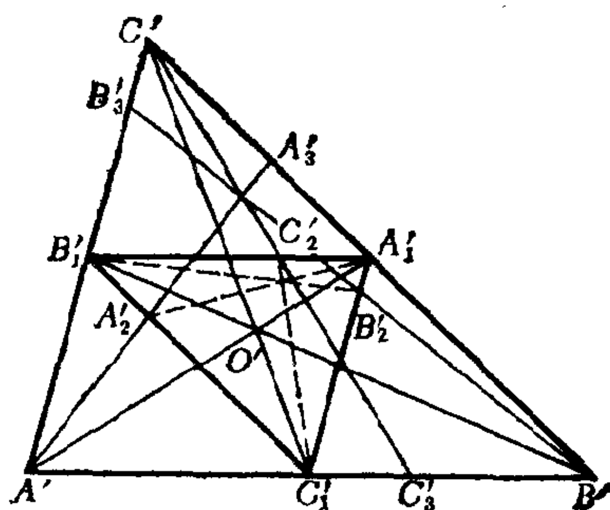



图 161

38. 用中心射影将四边形 $ABCO$ 映射到 $A'B'C'O'$，使得 $O'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的中线的交点。根据定理1(第56页)这一点是能够做到的。在这个射影下$\triangle A_1'B_1'C_1'$ 的边分别和$\triangle A'B'C'$ 的边平行(图161)。用 $A_3',B_3',C_3'$ 分别表示直线 $A'A_2',B'B_2',C'C_2'$与$\triangle A'B'C'$ 的对边的交点，我们可以断定

$$\frac{A'C_3'}{B'C_3'}=\frac{B_1'C_2'}{A_1'C_2'},\qquad \frac{B'A_3'}{C'A_3'}=\frac{C_1'A_2'}{B_1'A_2'},\qquad \frac{C'B_3'}{A'B_3'}=\frac{A_1'B_2'}{C_1'B_2'}.$$

现在假设

$$\frac{A_1'C_2'}{B_1'C_2'}\cdot\frac{B_1'A_2'}{C_1'A_2'}\cdot\frac{C_1'B_2'}{A_1'B_2'}=\pm 1.$$

(根据塞瓦定理和梅内劳斯定理(参看问题34)，这个假设意味着直线$A_1'A_2',B_1'B_2',C_1'C_2'$共点，或点$A_2',B_2',C_2'$共线。)由此可以推出

$$\frac{A'C_3'}{B'C_3'}\cdot\frac{B'A_3'}{C'A_3'}\cdot\frac{C'B_3'}{A'B_3'}=\pm 1.$$

但是，根据这些定理，从上述乘积的值是 $-1$ 或 $+1$，可知直线 $A'A'_3$, $B'B'_3$, $C'C'_3$ 共点，或点 $A'_3$, $B'_3$, $C'_3$ 共线。

3

39. (a) 第一种解法（基于定理1）。设 $D, E, F$ 是 $\triangle ABC$ 同它的内切圆 $S$ 的切点[图162(a)]。$BE$ 和 $CF$ 的交点 $O$ 在圆 $S$ 的内部（如果 $G$ 是 $CF$ 同 $S$ 的另一个交点，则直线 $BG$ 同直线 $AC$ 上的线段 $EC$ 相交。因此 $BE$ 同 $S$ 的弦 $FG$ 相交）。

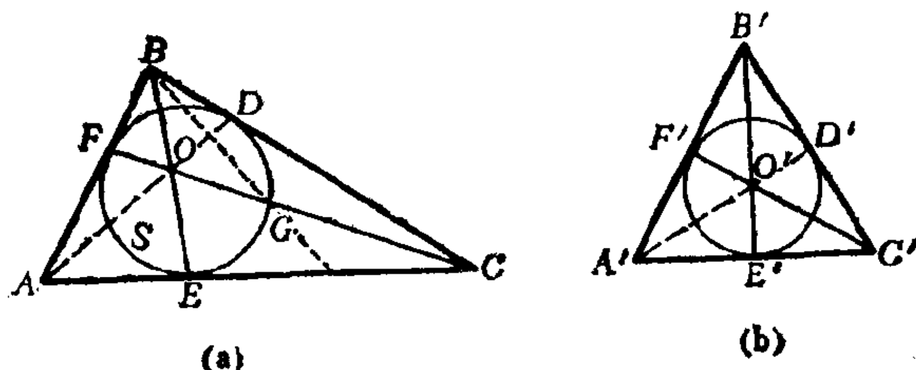



图 162

现在将我们的图形射影到平面 $\pi'$ 上，使得 $S$ 变成圆 $S'$ 而点 $O$ 变成 $S'$ 的中心 $O'$。在这个射影下图162(a) 变成图

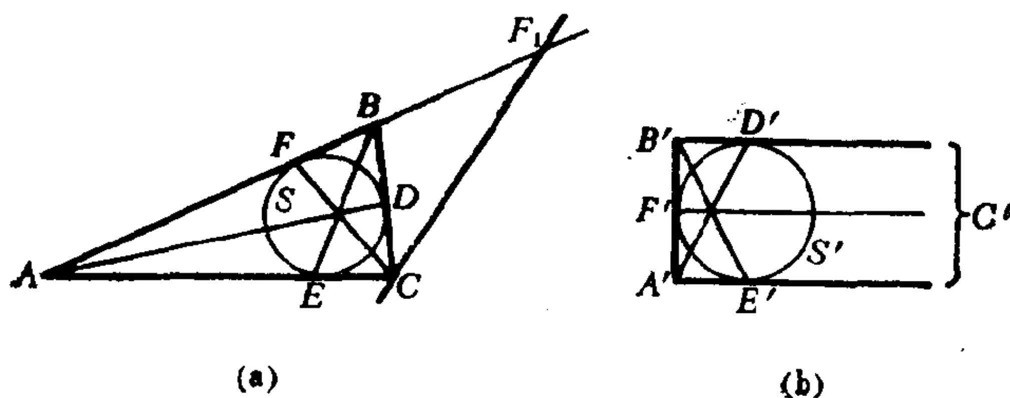



图 163

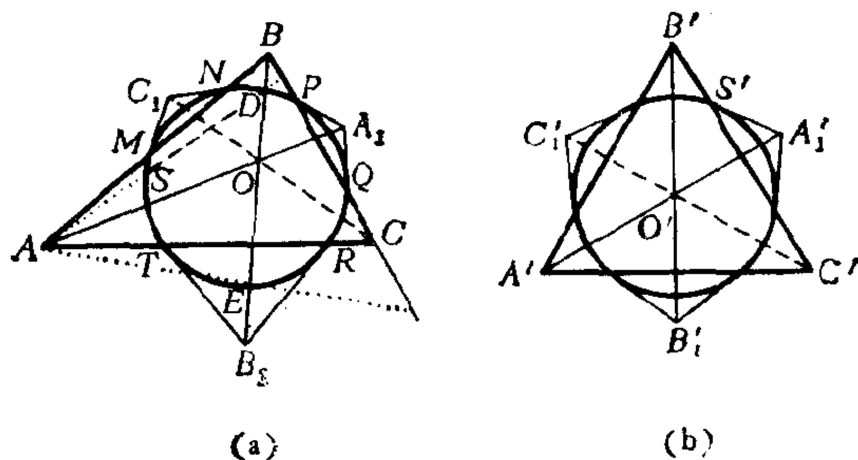
162(b)。容易看到，直线$B'E'$和$C'F'$既是$\triangle A'B'C'$的角平分线又是高线。由此$A'B'=B'C'$和$C'A'=B'C'$。因而$\triangle A'B'C'$是等边三角形，所以直线$A'D'$经过$O'$点. 从$A'D'$,$B'E'$,$C'F'$共点可以推出$AD$,$BE$,$CF$共点。

第二种解法（基于定理1′，这里的记号和上面一样）。在$AB$的延长线上找一点$F_1$，使得$F_1A/F_1B=-FA/FB$ [图163(a)]。直线$CF_1$在$\triangle ABC$之外，所以在$S$外面。把这个图形射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$，且直线$CF_1$变成$\pi'$的无穷远直线。则图163(a)变成图163(b)，其中$A'E' \parallel B'D' \parallel F'C'$。注意$F'$是线段$A'B'$的中点(这是因为，根据中心射影的性质C，有

$$\frac{F_1'A'/F_1'B'}{F'A'/F'B'}=-1,$$

$$\frac{F'A'}{B'F'}=\frac{F_1'A'}{F_1'B'},$$

其中$F_1'$是直线$A'B'$上的无穷远点，所以$F_1'A'/F_1'B'=1=F'A'/B'F'$)。由于$|A'F'|=|B'F'|$,可知$F'C'$是所得到的图形的对称轴，并且直线$A'D'$和$B'E'$的交点显然在




(a)　　(b)

图 164

$F'C'$上。由于$A'D'$，$B'E'$，$C'F'$共点，所以$AD$，$BE$，$CF$也共点。

(b) 可以看出，直线$AA_1$和$BB_1$的交点$O$在圆$S$的内部。实际上，$AA_1$和$BB_1$与$S$的弦$PQ$和$RT$分别相交[图164(a)]。设$D$和$E$是$BB_1$与$S$的交点，由于直线$AD$和$AE$与直线$BC$交于线段$PQ$之外，并且在$PQ$之两侧，可知$AA_1$和弦$DE$相交。

将图164(a)射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$而点$O$变成$S'$的中心$O'$，这时图164(a)变成图164(b)。由于$A'A_1'$和$B'B_1'$经过点$O'$，可知$A'A_1' \perp B'C'$和$B'B_1' \perp A'C'$，因此$A'A_1'$和$B'B_1'$是$\triangle A'B'C'$的两条高线，且$O'$是它们的交点。从而$O'C'$是$\triangle A'B'C'$的第三条高线。显然，从$S'$的中心$O'$到$\triangle A'B'C'$的边$A'B'$的垂线必定经过$C_1'$。因此直线$A'A_1'$，$B'B_1'$，$C'C_1'$交于$O'$。所以直线$AA_1$，$BB_1$，$CC_1$交于$O$点。

**40.** 将图165(a)射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$，并

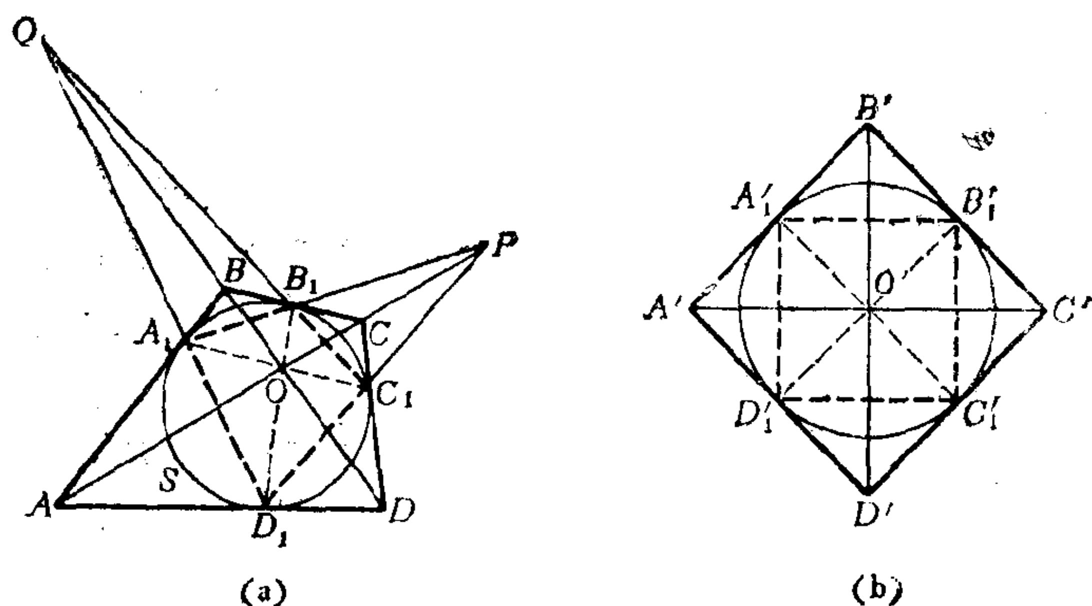



图 165

且四边形$A_1B_1C_1D_1$的对角线的交点$O$变成$S'$的中心$O'$。这时图165(a)变成图165(b)，其中$A'B' \parallel C'D' \perp A_1'C_1'$和$B'C' \parallel A'D' \perp B_1'D_1'$。因此$A'B'C'D'$是平行四边形。由于它外切于圆，所以必是一个菱形。

(a) 大家知道，菱形$A'B'C'D'$的对角线的交点与它的內切圆的中心重合。因此四边形$A'B'C'D'$和$A_1'B_1'C_1'D_1'$的对角线的交点也重合，从而四边形$ABCD$和$A_1B_1C_1D_1$的对角线的交点也重合。

(b) 根据对称性，显然$A_1'B_1' \parallel D_1'C_1' \parallel A'C'$和$B_1'C_1' \parallel A_1'D_1' \parallel B'D'$。因此$AC$必经过$P$，$BD$必经过$Q$。

41. 将问题中的图形射影到一个新的平面$\pi'$上，使得圆$S$变成圆$S'$而点$O$变成$S'$的中心$O'$. 在这个射影下四边形$ABCD$变成矩形$A'B'C'D'$(因为$A'B'C'D'$的对角线交于外接圆$S'$的中心)。因此点$P$和$Q$变成与这个矩形的边的方向相对应的无穷远点$P'$和$Q'$(图166)。

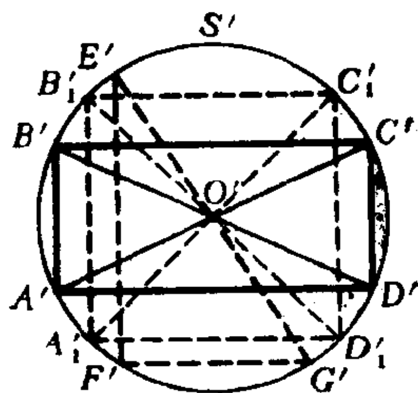


图 166

(a) 如果$S'$的內接三角形$E'F'G'$的边$E'F'$和$F'G'$分别经过无穷远点$P'$和$Q'$，即如果$E'F' \parallel A'B'$和$F'G' \parallel B'C'$，则边$E'G'$经过$S'$的中心$O'$(在$S'$中弦$E'G'$所对的圆周角是直角$E'F'G'$)。如果边$E'G'$经过中心$O'$且$E'F'$经过点$P'$，即如果$E'F' \parallel A'B'$，则$F'G' \parallel B'C'$，即$F'G'$经过点$Q'$(由于直径所张的圆周角是直角)。由此即可得到问题41(a)中的结论。

(b) 假若圆$S'$的內接矩形$A_1'B_1'C_1'D_1'$的边$A_1'B_1'$和$D_1'C_1'$

经过点 $P'$，而边 $B'_1C'_1$ 经过 $Q'$(即 $A'_1B'_1 /\!/ D'_1C'_1 /\!/ A'B'$ 和 $B'_1C'_1 /\!/ B'C'$)，则 $A'_1D'_1 /\!/ B'C' /\!/ A'D'$，且对角线 $A'_1C'_1$ 和 $B'_1D'_1$ 交于 $S'$ 的中心 $O'$。由此可以得到(b)的结论。

(c) 如果内接四边形 $A'_1B'_1C'_1D'_1$ 的对角线 $A'_1C'_1$ 和 $B'_1D'_1$ 交于圆 $S'$ 的中心 $O'$，并且边 $A'_1B'_1$ 经过点 $P'$(即 $A'_1B'_1 /\!/ A'B'$)，则 $D'_1C'_1 /\!/ A'B'$ 且 $B'_1C'_1 /\!/ A'_1D'_1 /\!/ B'C'$。由此可得(c)的结论。

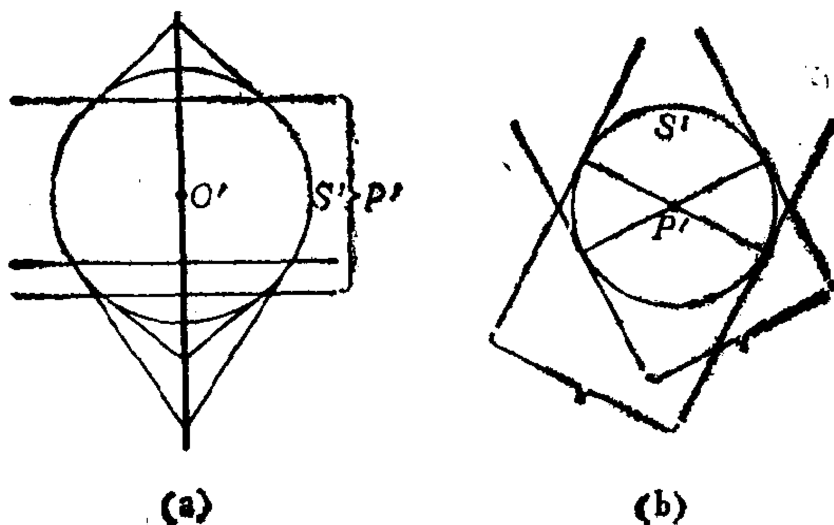



图 167

42. 我们考虑两种情形。

1. $P$ 是 $S$ 的外点。将问题中的图形射影到平面 $\pi'$ 上，使得圆 $S$ 变成圆 $S'$，而 $P$ 变成 $\pi'$ 的一个无穷远点 $P'$。在这个射影下，所要找的轨迹变成一条直线，即变成 $S'$ 的与 $P'$ 所确定的方向相垂直的直径[图167(a)]。由此可知所要找的轨迹是一条直线①。

2. $P$ 是 $S$ 的内点。将问题中的图形射影到平面 $\pi'$ 上，使得圆 $S$ 变成圆 $S'$，而 $P$ 变成 $S'$ 的中心 $P'$。显然，这时所要

① 更确切地说，它是一直线在 $S$ 外的部分。

找的轨迹变成$\pi'$的无穷远直线[图167(b)]。由此可知所求的轨迹是一直线。

注意，如果$P$在$S$上，则所求的轨迹就是$S$在$P$点的切线①。

43. (a) 我们分两种情形考虑。

1. $P$是$S$的外点(参看图58(a))。将问题中的图形射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$，而$P$变成$\pi'$的一个无穷远点$P'$。这时直线$AB$和$MN$变成平行直线$A'B'$和$M'N'$[图168(a)]。根据对称性，可知点$K'$和$X'$[图168(a)]在$S'$的与直线$l'$相垂直的直径上($l'$是$l$的象)。因此，$X'$的轨迹是经过$K'$垂直于$l'$的直线。所以$X$的轨迹是经过$K$的直线。

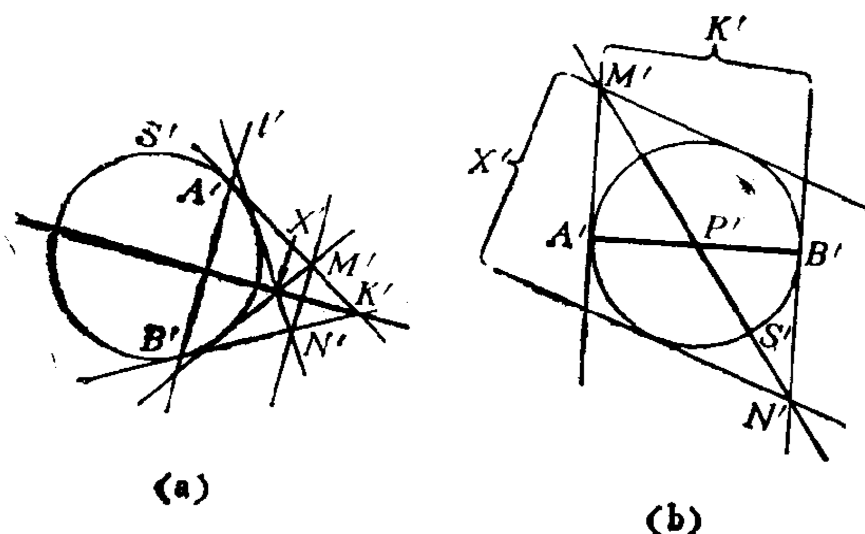



图 168

2. $P$是$S$的内点。将这个图形射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$，而$P$变成$S'$的中心$P'$[图168(b)]。这时直线$A'B'$和$M'N'$是$S'$的直径。因此$S'$在$A'$和$B'$的切线$A'K'$

① 所考虑的轨迹与$P$关于$S$的极线相重合(参看§4)。

和$B'K'$平行。所以从$M'$和$N'$到$S'$的第二条切线也平行。我们可以看到，在这时$X'$的轨迹是$\pi'$的无穷远直线。$K'$也在这条直线上。从而$X$的轨迹是经过$K$的一条直线。

显然，问题中的条件排除了$P$在$S$上的情形(如果$P$和$A$重合，则$M$也和$A$重合，并且$S$只有一条切线经过$M$，此即直线$AK$)。

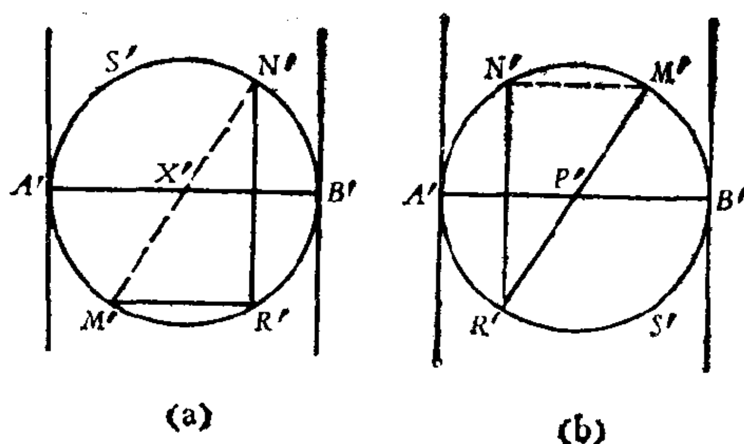



图 169

(b) 假如$P$在$S$上，问题中的结论显然是对的(实际上，如果$P$和$A$重合，则$N$也和$A$重合，不动点$X$和$A$重合)。所以我们只须考虑下列两种情形。

1. $P$是$S$的外点。将问题中的图形射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$，且$PK$变成$\pi'$的无穷远直线[图169(a)]。这时$AB$变成$S'$的直径$A'B'$，而直线$AK$和$BK$则变成$S'$在$A'$和$B'$的切线。容易看到$R'M' \perp R'N'$，所以$M'N'$是$S'$的直径。因此，对于点$R'$的每一种选取，直线$M'N'$总是经过$S'$的中心$X'$。我们的结论由此可以推出。

2. $P$是$S$的内点(参看图58(b))。将问题中的图形射影到平面$\pi'$上，使得圆$S$变成圆$S'$，并且$P$变成$S'$的中心

$P'$[图169(b)]。这时 $AB$ 变成$S'$的直径 $A'B'$，而$K$则变成垂直于$A'B'$的直径的无穷远点$K'$。由于 $R'N'\perp A'B'$和$M'N'\perp R'N'$，可知$M'N' \parallel A'B'$；即对于点$R'$的每一种选取，直线$M'N'$和$A'B'$总是交于$A'B'$的无穷远点$X'$。由此即可得到我们的结论。

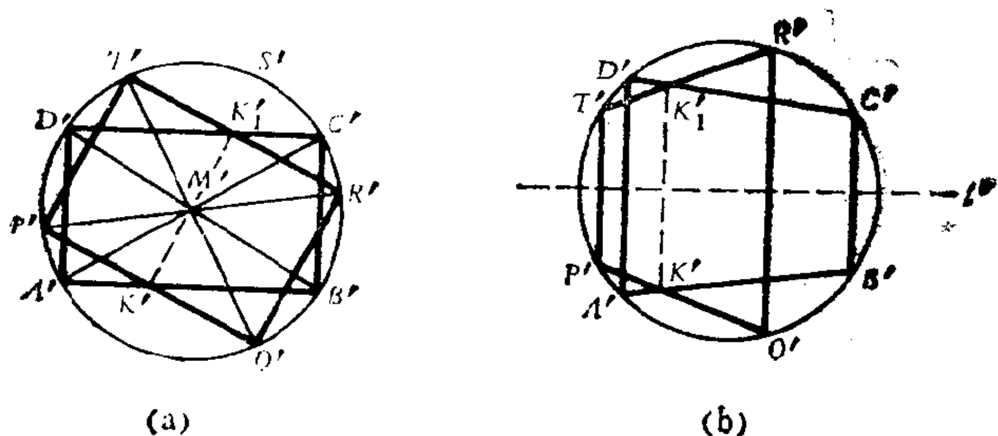



图 170

**44.** (a) 假设所要的四边形$ABCD$已经作出来。命$M$是它的对角线的给定的交点，并设$AB$和$CD$经过给定的点$K$和$L$。把问题中的图形射影到平面$\pi'$上，使得外接圆$S$变成圆$S'$，而点$M$变成$S'$的中心$M'$，则$ABCD$变成矩形$A'B'C'D'$。

现在，如果$P'Q'R'T'$是内接于$S'$的四边形，其对角线交于中心$M'$(这说明$P'Q'R'T'$是一个矩形)，且其边$P'Q'$经过$K'$，则边$R'T'$必经过$K'_1$，$K'_1$是$K'$对于$M'$的对称点[图170(a)]。这样，所有内接于$S'$的、其对角线交于$M'$且其边$P'Q'$经过$K'$的那些四边形，它们的边$R'T'$都经过定点$K'_1$。由此可知，所有内接于$S$的四边形$PQRT$，如果它的对角线交于点$M$且它的边$PQ$经过$K$，则它的边$RT$必定都

经过一个定点 $K_1$。为了确定$K_1$，只须作出两个这样的四边形就够了。所要找的四边形 $ABCD$ 的边 $CD$ 可以由连接 $K_1$ 和 $L$ 的直线得到。

如果$K_1$和 $L$ 不重合，且 $K_1L$同$S$相交，则我们的问题有唯一解。如果 $K_1L$ 不同$S$相交，这个问题无解。如果 $K_1$和 $L$重合，则问题有无穷多个解。

(b) 设 $ABCD$ 是内接于圆$S$的所要作的四边形，它的边 $BC$ 和 $DA$ 交于给定的点$M$，并且它的边 $AB$ 和 $CD$ 分别经过给定的点$K$和$L$。将这个图形所在的平面射影到平面 $\pi'$ 上，使得$S$变成圆$S'$而$M$变成 $\pi'$ 的一个无穷远点$M'$，则四边形 $ABCD$ 变成以 $B'C'$ 和$D'A'$ 为底的梯形$A'B'C'D'$（参看图170(b)）。由于这个梯形内接于圆，所以它是等腰的。

内接于圆 $S'$ 的四边形 $P'Q'R'T'$，如果它的边 $Q'R'$ 和 $T'P'$ 交于无穷远点 $M'$，则必定是一个等腰梯形，它的对称轴是$S'$的垂直于由$M'$所确定的方向的直径 $l'$。因此，假若这种四边形的边$P'Q'$经过某一个点$K'$，则边 $R'T'$经过与 $K'$关于$l'$对称的点 $K_1'$。由此可以推出，所有内接四边形 $PQRT$，如果它的边 $QR$ 和$PT$ 交于$M$，且边 $PQ$ 经过$K$，则它的边 $RT$ 必定都经过一个定点$K_1$。为了找出 $K_1$，只需作出两个这样的四边形。作连接$K_1$和 $L$ 的直线，就可以得到所要找的四边形的边$CD$。

如果 $K_1$和 $L$不重合，这个问题有唯一解或无解（根据直线 $K_1L$ 是否同该圆相交而定）。如果 $K_1$和 $L$ 重合，则问题有无穷多个解。

**45.** 假若$O$点在$S$上，这个问题没有意义。所以只须考虑下列两种情形。

1. $O$是$S$的外点。将这个图形所在的平面射影到平面

$\pi'$ 上，使得圆 $S$ 变成圆$S'$，并且 $O$ 点变成 $\pi'$ 的一个无穷远点 $O'$。在这个射影下图59变成图171(a)，其中 $A'A'_1 \parallel B'B'_1 \parallel C'C'_1$。

我们要证明$P'Q' \parallel A'A'_1$。内接于$S'$的梯形 $A'B'B'_1A'_1$ 是等腰的，$A'B' = A'_1B'_1$。因此$\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{A'_1B'_1}$，$\angle A'C'B' = \angle A'_1X'B'_1$。这说明点$X'$，$C'$，$P'$，$Q'$ 在一个圆上，所以 $\angle X'P'Q' = \angle X'C'Q' = \angle X'C'A'$。但是 $\angle X'C'A' = \angle X'A'_1A'$，所以$\angle X'P'Q' = \angle X'A'_1A'$，从而 $P'Q' \parallel A'A'_1$。

用类似的方法可以证明 $Q'R' \parallel B'B'_1$。于是有 $P'Q' \parallel Q'R' \parallel A'A'_1$，它说明 $P'$，$Q'$，$R'$在经过无穷远点 $O'$ 的一条直线上。由此可以推出图59中的点 $P$，$Q$，$R$ 在经过 $O$ 点的一条直线上。

2. $O$ 是 $S$ 的内点。将图59射影到平面 $\pi'$ 上，使得 $S$ 变成圆$S'$而 $O$ 变成$S'$的中心 $O'$[图171(b)]。我们要证明 $P'Q'$ 经过$O'$。为此先证明

$$(*)\qquad \frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}} = \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}},$$

其中 $S_{XYZ}$ 表示$\triangle XYZ$的面积。

实际上，设 $XY$ 是一直线，$h_{XY}$ 是从$O'$ 到 $XY$ 的垂线段或它的长度(从上下文就可以明白它指的是线段还是长度)。则

$$(**)\qquad \frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}} = \frac{P'A'_1 \cdot h_{X'A'_1}}{P'B' \cdot h_{B'C'}},$$

$$\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}} = \frac{Q'A' \cdot h_{C'A'}}{Q'B'_1 \cdot h_{X'B'_1}}$$

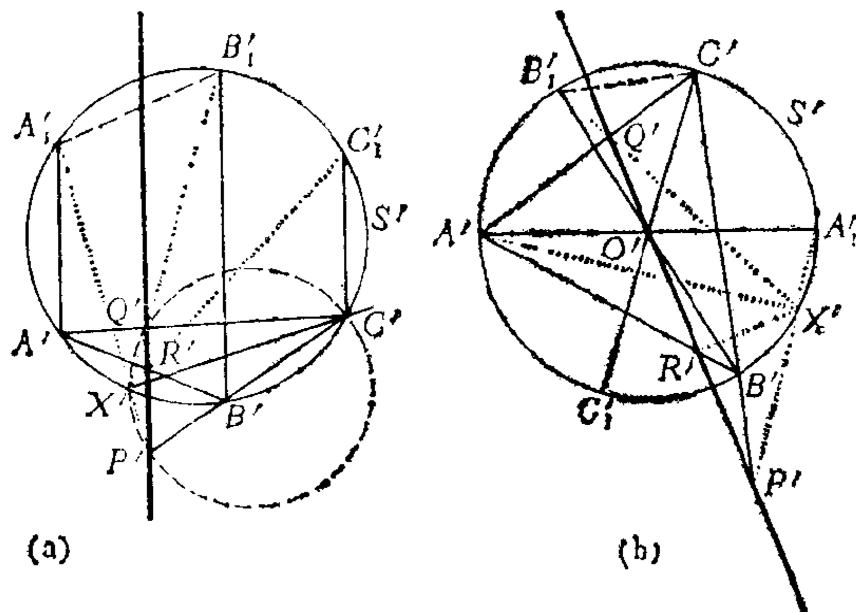



图 171

注意，$h_{X',A_1'}$ 是$\triangle X'A_1'A'$的中位线，因此 $h_{X',A_1'}=X'A'/2$。类似地，$h_{B',C'}=B_1'C'/2$。其次，从 $\triangle A'Q'X'\backsim\triangle B_1'Q'C'$ 可以推出

$$\frac{A'X'}{B_1'C'}=\frac{Q'A'}{Q'B_1'},$$

所以

$$\frac{h_{X',A_1'}}{h_{B',C'}}=\frac{X'A'}{B_1'C'}=\frac{Q'A'}{Q'B_1'}.$$

此外，用类似的推理可以得到

$$\frac{h_{C',A'}}{h_{X',B_1'}}=\frac{P'A_1'}{P'B'}.$$

把这些关系式代入等式(* *)，我们可以得到关系式(*)。

现在，以 $Q_1'$表示直线$P'O'$同$\triangle A'B'C'$的边$A'C'$的交点。此外，命$h_1,h_2,h_3,h_4$依次表示从点 $A_1',B',A',B_1'$ 到直线$P'O'Q_1'$的垂线的长度。由于$O'A'=O'A_1'$，可知 $h_1=h_3$，类似地有$h_2=h_4$。因此

$$\frac{S_{P'O'A_1'}}{S_{Q_1'O'A'}}=\frac{P'O'}{Q_1'O'},$$

$$\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q_1'O'B_1'}}=\frac{P'O'}{Q_1'O'}.$$

所以
$$\frac{S_{P'O'A_1'}}{S_{Q_1'O'A'}}=\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q_1'O'B_1'}},$$

或

(＊＊＊)
$$\frac{S_{P'O'A_1'}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q_1'O'A'}}{S_{Q_1'O'B_1'}}$$

比较等式(＊＊＊)和(＊)，我们得到

$$\frac{S_{Q_1'O'A'}}{S_{Q_1'O'B_1'}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'}}.$$

由此可以推出点$Q_1'$和$Q'$重合。

根据类似的理由可以证明$R'$在直线$O'P'$上。所以$P'$，$Q'$，$R'$在一条经过$O'$的直线上。由此即可推出问题的结论。

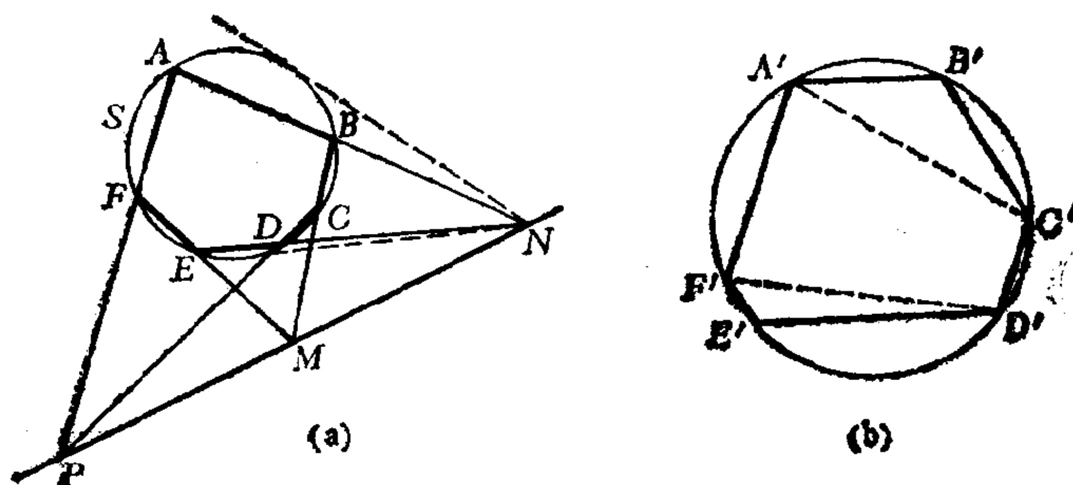



图 172

46. 设$M, N, P$是内接六边形$ABCDEF$的对边的交点

(看图60和图172(a))。由于从$N$到$S$的切线切$S$于$\widehat{AB}$和$\widehat{DE}$上的点，$NM$与$S$不相交。因此我们可以将图172(a)射影到一个平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$而$NM$变成$\pi'$的无穷远直线。这时图172(a)变成图172(b)，其中$A'B' \parallel E'D'$和$B'C' \parallel E'F'$。从而

$$\angle A'B'C' = \angle D'E'F', \quad 即 \quad \widehat{A'B'C'} = \widehat{D'E'F'}.$$

由此可以推出

$$\angle F'A'C' + \angle D'C'A'$$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{C'D'} + \widehat{D'E'F'}) + \frac{1}{2}(\widehat{F'A'} + \widehat{D'E'F'})$$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{C'D'} + \widehat{D'E'F'} + \widehat{F'A'} + \widehat{A'B'C'})$$

$$= 180°.$$

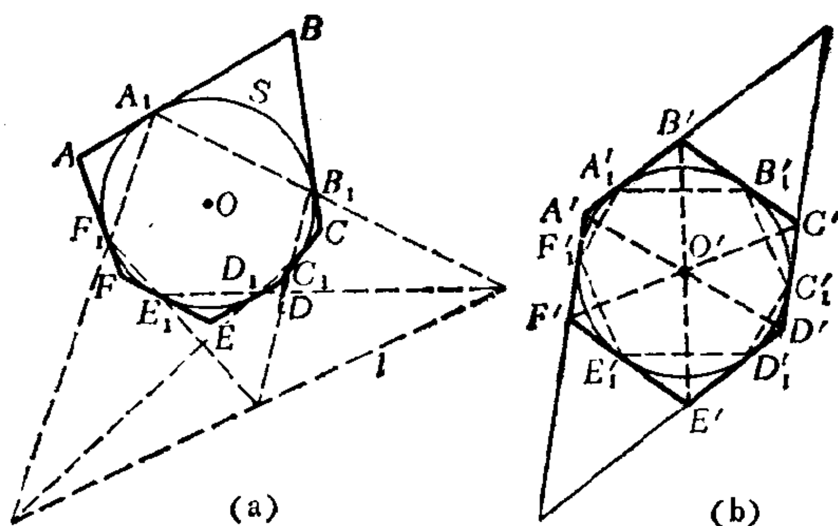



图 173

因此$A'F' \parallel C'D'$，即直线$A'F'$和$D'C'$的交点是无穷远点。所以六边形$A'B'C'D'E'F'$的对边的交点$P'$，$M'$，$N'$共线

(它们都在$\pi'$的无穷远直线上)。从而图172(a)中的点$P,M,N$也共线。

47. 图173(a)中的六边形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$内接于圆$S$，所以满足巴斯卡定理(问题46)的条件。将图173(a)射影到平面$\pi'$上，使得$S$变成圆$S'$，且包含六边形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$对边交点的直线$l$变成$\pi'$的无穷远直线。在这个射影下六边形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$变成对边平行的六边形$A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'F_1'$[图173(b)]。现在考虑$S'$的切线$A'B',A'F',D'C',D'E'$。由于$A_1'F_1' \parallel C_1'D_1'$，由这些切线所确定的四边形以$A'D'$作为对称轴。这个轴经过$S'$的中心$O'$，并且垂直于$A_1'F_1'$和$C_1'D_1'$。用完全类似的方法可以证明直线$B'E'$和$C'F'$也经过$O'$点。所以直线$AD,BE,CF$共点。

48. 考虑内接于给定圆$S$的五边形$ABCDE$($B,C,D,E$是这个圆上的任意点)。假设$L$和$M$分别是直线$AB$和$DE$，$AE$和$BC$的交点，则从巴斯卡定理可以推出$S$在$A$点的切线同边$CD$的交点$K$在连接$L$和$M$的直线上(参看图174和62(a))。因此，$K$可以单用直尺作出来(由于它是$CD$和$LM$的交点)。连接$A$和$K$的直线就是所要的切线。

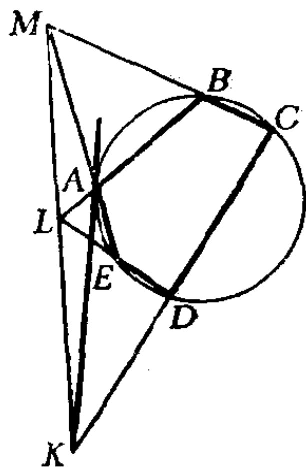


图 174

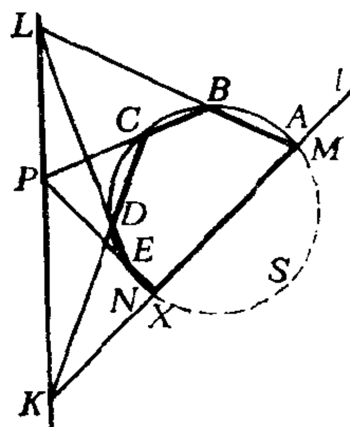


图 175

**注** 注意，在作这个图时，可以将自己仅限于包含$A$的任意小的一段圆弧内(点$C$,$D$,$E$,$F$可以在这段弧上选取)。这个事实我们在后面要用到。

**49.** 考虑内接于圆$S$的六边形$ABCDEX$，其中$A$和$X$是直线$l$同$S$的交点，而$B$,$C$,$D$,$E$则是$\overset{\frown}{MN}$上的任意点(图175)。用$K$,$L$,$P$分别表示直线$AX$(即$l$)和$CD$,$AB$和$DE$，$BC$和$EX$的交点。则根据巴斯卡定理(参看问题46)$K$,$L$,$P$共线。因此，我们可以只用直尺先找出$P$(作为$BC$和$KL$的交点)，再找出$X$(作为$PE$和$l$的交点)。

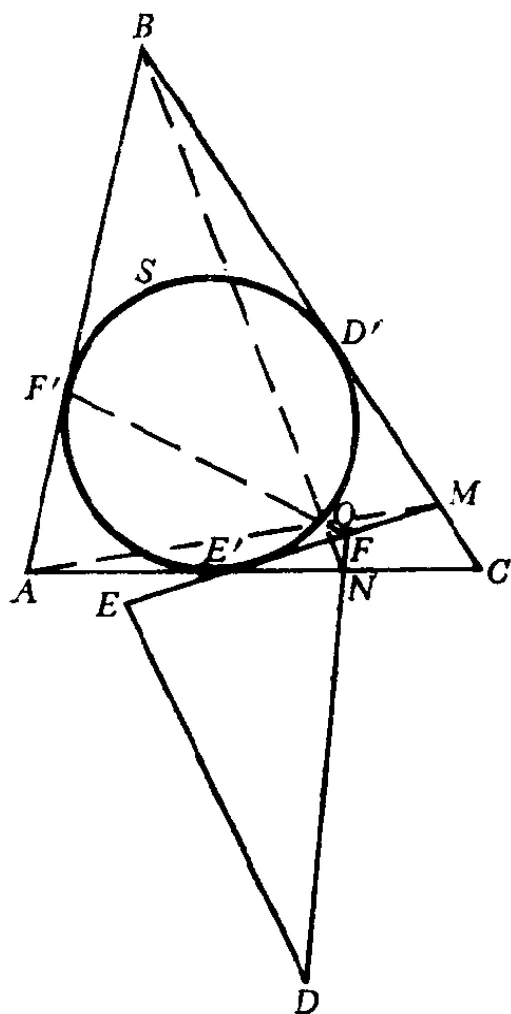



图 176

50．考虑(退化的)六边形$AF'BMFN$(图65)。根据勃良松定理，直线$FF'$应该经过直线$AM$和$BN$的交点$Q$(图176)。通过考虑适当的六边形，我们可以类似地证明直线$DD'$和$EE'$也经过$Q$点。

4

51．如果$A$在圆$S$外部($d>1$)，而$AC$和$AD$是从$A$到$S$的两条切线，则$A$的极线$a$和$CD$重合，并且$a\perp OA$(参看第86页)．设$P$是$CD$和$OA$的交点[图177(a)]，由于$\triangle OCA\backsim\triangle OPC$，有$OA/OC=OC/OP$，或$OP=OC^2/OA=1/d$，这就是我们所要证的。

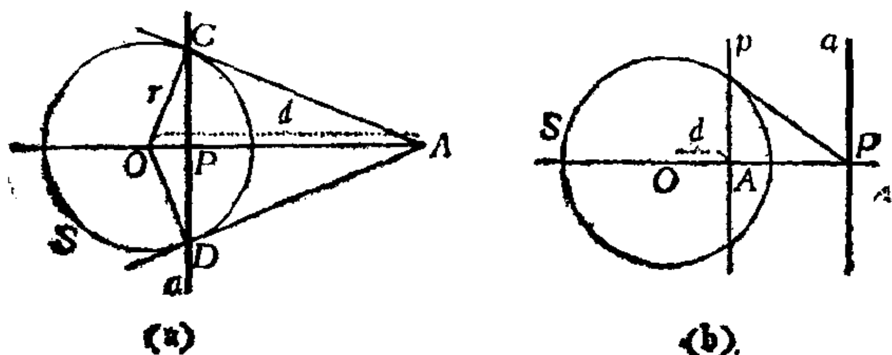



图 177

如果$A$在$S$上($d=1$)，则定理是显然的。如果$A$在$S$的内部($d<1$)，$p$是经过$A$点垂直于$OA$的直线，而$P$是$p$的极点，则$P$在直线$OA$上，并且在$S$外部[图177(b)]。我们可以如上推出$OA=1/OP$，或$OP=1/OA=1/d$。$A$的极线$a$是$OA$的经过$P$点的垂线(参看第86页定理2)。因此$OP$是从$O$到$a$的距离，而这个距离就是$1/d$。

注　用同样的方法可以证明，如果$S$的半径是$r$，则从

$O$ 到 $A$ 的极线 $a$ 的距离是 $r^2/d$。

52．设 $P_1$是 $OA$和 $a$ 的交点，$Q_1$ 是$OB$和 $b$ 的交点(图178)。考虑直角梯形 $OAPQ_1$ 和 $OBQP_1$，对它们有 $\angle AOQ_1=\angle BOP_1$。由问题51，$OA\cdot OP_1=OB\cdot OQ_1=r^2$($r$是 $S$的半径)，所以 $OA/OB=OQ_1/OP_1$。由此可知这两个梯形相似(用中心为$O$点，系数为$k=OA/OB=OQ_1/OP_1$的伸缩，然后再对 $\angle AOB$ 的平分角线作反射，从 $OBQP_1$ 可以得到 $OAPQ_1$)。因此$OA/AP=OB/BQ$ ($OA$和$OB$，$AP$ 和$BQ$ 是这两个梯形的两对对应边)，这就是我们所要证的。

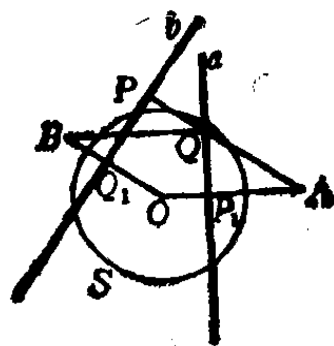


图 178

53．(a)设$P$和$Q$是$S$的这个内接四边形的对边的交点，$R$是它的对角线的交点。从定理1可知$R$是$PQ$的极点(参看图73(a))。这就得到我们所要证明的定理。

(b)设 $A_1,B_1,C_1,D_1$是$S$的外切四边形 $ABCD$ 的边同$S$的切点(图57)。则四边形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$的对角线的交点重合(参看§3，问题40(a))。这两个四边形的对边交点

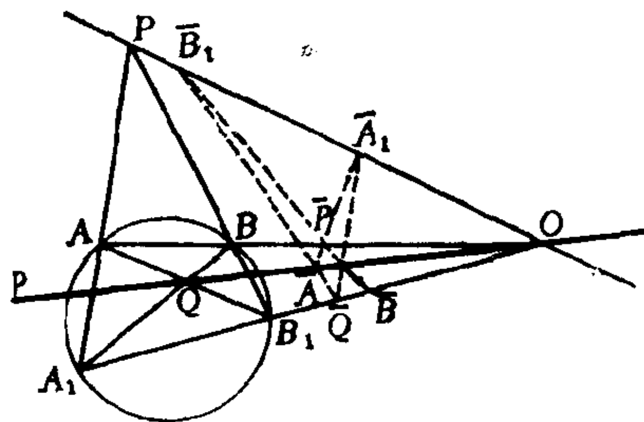


图 179(a)

的连线也重合(证法和问题40(a)的解法相类似)。从(a)可以得到所要的结果。

54. 从$A$到圆$S$的两条切线的切点同$S$与$A$的极线$a$的交点相重合(参看第85页).于是单用直尺容易作出$a$来(参看图66(b))。把$S$与$a$的交点用直线和$A$点相联结，就可以得到这两条切线。

55. 设$ABB_1A_1$是圆$S$的内接四边形，并设边$AA_1$和$BB_1$交于点$P$，边$AB$和$A_1B_1$交于点$O$，而对角线$AB_1$和$A_1B$交于点$Q$。则$P$的极线$p$是直线$OQ$[图179(a)]。由此可知$p$是$P$关于一对直线$AB$和$A_1B_1$的极线(参看§2，问题17(a))。因此，$p$是直线$OP$上任意一点关于直线$AB$和$A_1B_1$的极线(参看问题17(a))。容易证明：$A_1B_1$是$AB$的任意一点关于直线$OP$和$p$的极线.(为此，只要将平面$\pi$的四条直线$AB$，$A_1B_1$，$OP$，$p$射影到另一个平面$\pi'$上，使得$OP$是$\pi$的特殊直线。这时$AB$和$A_1B_1$变成平行直线$A'B'$和$A_1'B_1'$，$OP$变成平面$\pi'$的无穷远直线$O'P'$，而$p$则变成由$A'B'$和$A_1'B_1'$所确定的带子的中位线$p'$[图179(b)]。从一点关于一对直线的极线的定义，$A_1'B_1'$是直线$A'B'$上任意一点$P'$关于直线$p'$和$O'P'$的极线(参看问题17(a)的解答)。从而$A_1B_1$是$P'$在直线$AB$上的原象$P$关于直线$p$和$OP$的极线)。因此，给定了

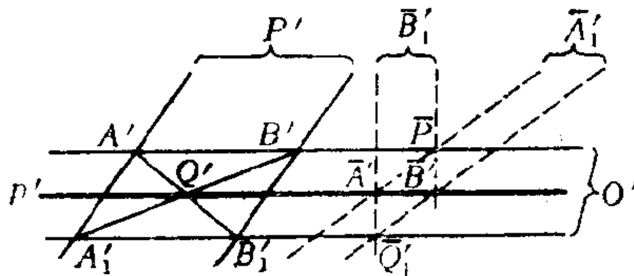



图 179(b)

直线$OP$，$p$，$AB$，我们可以只用直尺作出直线$A_1B_1$。那就是画两条相交于直线$AB$上的点$\bar{P}$的直线$\bar{P}\bar{A}\bar{A}_1$和$\bar{P}\bar{B}\bar{B}_1$（$\bar{A}$和$\bar{B}$在$p$上，而$\bar{A}_1$和$\bar{B}_1$则在$OP$上），然后从直线$\bar{A}\bar{B}_1$和$\bar{B}\bar{A}_1$的交点$\bar{Q}$到直线$p$和$AB$的交点$O$作连线。

现在回来解我们的问题。设$p$是一条任意直线，它与$l$交于某一个点$O$，并与给定的弧交于点$M$和$N$（$p$与给定弧的交点可以与弧的端点重合。我们所需要的只是$p$不与$l$平行，以及$\overset{\frown}{MN}$小于半圆）。$p$关于$S$的极点$P$是$S$在$M$和$N$的切线的交点，它可以只用直尺作出来（例如，参看问题48，特别是它的解答后面的附注；也可以用§4的定理1）。现在假设$l$与$S$交于点$A$和$B$（这两个点是我们要定的）。直线$PA$和$PB$与$S$还交于另外两个点$A_1$和$B_1$（图180）。正如我们在上面证明的，给了直线$AB$（即$l$）和$p$，就能够只用直尺作出$A_1B_1$来。注意，如果直线$l$在$\angle MOP$的外部（那时$l$与$S$相交而不与$\overset{\frown}{MN}$相交），则$A_1B_1$穿过$\angle MOP$的内部，因此

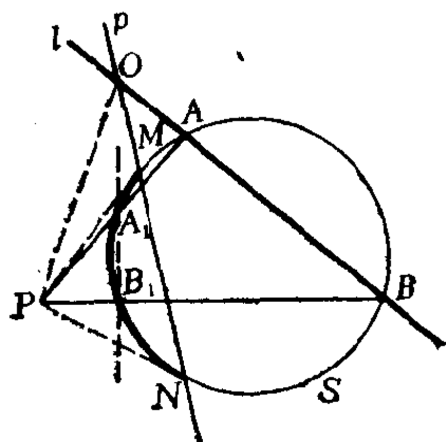



图 180

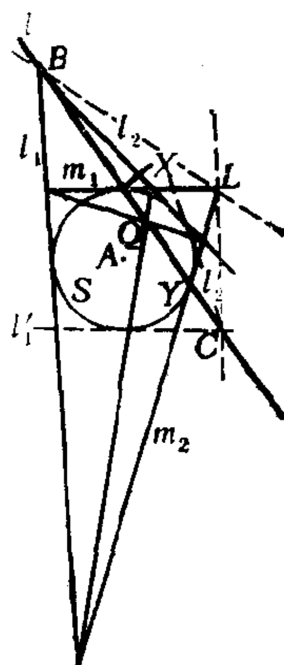



图 181

它或者与$S$不相交(这时$l$与$S$不相交，点$A$和$B$不存在)，或者与$\overset{\frown}{MN}$交于点$A_1$和$B_1$。$PA_1$和$PB_1$与$l$的交点就是所要找的点。

在$A_1$和$B_1$重合，即直线$A_1B_1$是$S$在$A_1$的切线的情形。我们留给读者去仔细考虑。这时$l$是$S$在直线$PA_1$和$l$的交点$A$处的切线；$p$是$P$关于直线$OA$和$OA_1$的极线。

56．在图72(b)中，直线$l_2$是从$B$到以$A$为中心，$a$为半径的圆$S$的切线。因此，不必画出$S$，我们可以用平行直尺画出从任意一点$B$到$S$的两条切线$l_1$和$l_2$(图181；自然，点$B$必须在$S$外部)。现在，设$B$是$l$上的一点，$L$是$l$关于$S$的极点，并设$m_1$和$m_2$是从$L$到$S$的切线。由直线$l_1,l_2,m_1,m_2$所构成的四边形的对角线的交点$Q$在$l$上(参看§3，问题40)。由此可知$BQ$(即$l$)是$L$关于直线$l_1$和$l_2$的极线，而$BL$则是$Q$关于$l_1$和$l_2$的极线（参看§2，问题17(a)）．所以$BL$是$l$上的每一点关于$l_1$和$l_2$的极线(参看问题17(a))。由于$l$是给定的，并且$l_1$和$l_2$可以作出来，因此直线$BL$能够只用直尺作出来。

用类似的方法可以找出直线$CL$，其中$C$是在$S$外部的$l$上的另一个点。从而$L$是$BL$和$CL$的交点。可以用平行直尺作出来的从$L$到$S$的切线$m_1$和$m_2$，与$l$交于所要找的点$X$和$Y$。

(如果$l$不与$S$相交，则$L$在$S$內部，从$L$到$S$沒有切线。)

57．设$a$是$A$关于圆$S$的极线。假如我们用一个中心射影将$S$射影到圆$\bar{S}$上，且$A$变为点$\bar{A}$，则直线$a$变为$\bar{A}$关于$\bar{S}$的极线$\bar{a}$。类似地，在这个射影下，直线$b$关于$S$的极点$B$变成直线$\bar{b}$关于$\bar{S}$的极点$\bar{B}$，这里$\bar{b}$是$b$的象。现在我们考虑

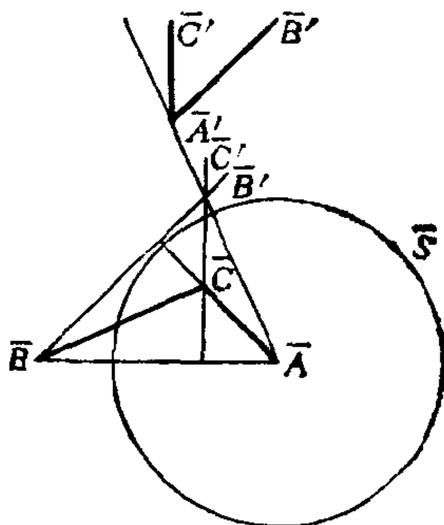



图 182

三角形$ABC$和$A'B'C'$关于$S$的各种可能的位置。

1° 假定$\triangle ABC$至少有一个顶点(例如$A$)在$S$内部。将我们图形的平面$\pi$射影到平面$\pi'$上,使得$S$变成圆$\overline{S}$,而$A$变成$\overline{S}$的中心$\overline{A}$。在这个射影下,我们的图形变成图182中的图形,其中$\overline{A}'$是$\overline{B}\overline{C}$的极点;直线$AC$和$AB$的极点$B'$和$C'$变成$\overline{S}$的直径$\overline{A}\overline{C}$和$\overline{A}\overline{B}$的极点,即变成与$\overline{A}\overline{C}$和$\overline{A}\overline{B}$正交的方向相对应的无穷远点$\overline{B}'$和$\overline{C}'$(参看图182和67(b))。由此可知$\overline{B}\overline{B}'$和$\overline{C}\overline{C}'$是$\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$的高线。由于$\overline{A}\overline{A}'$是$\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$的第三条高线($\overline{B}\overline{C}$的极点$\overline{A}'$在从$\overline{S}$的中心$\overline{A}$到直线$\overline{B}\overline{C}$的垂线上),直线$\overline{A}\overline{A}'$,$\overline{B}\overline{B}'$,$\overline{C}\overline{C}'$共点。因此$AA'$,$BB'$,$CC'$共点。

2° 假定$\triangle ABC$至少有一条边不与$S$相交。这时$\triangle A'B'C'$的对应的顶点在$S$内部,我们可以将情形1°中的论证用到$\triangle A'B'C'$上。

3° 最后,假定$\triangle ABC$的所有顶点都在$S$外部,并且它的边没有一条整个地在$S$的外部。这时,我们的定理可以归结为问题39(b)中的定理。

58. 设$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的边关于圆$S$的极点分别是$A'$,$B'$,$C'$和$A_1'$,$B_1'$,$C_1'$(图183)。根据定理2，$B'C'$是$A$的极线，而$B'C'$和$B_1'C_1'$的交点$K'$则是$AA_1$的极点。类似地，直线$A'C'$和$A_1'C_1'$，$A'B'$和$A_1'B_1'$的交点$L'$和$M'$分别是直线$BB_1$和$CC_1$的极点。因此$K'L'$是$AA_1$和$BB_1$的交点$O$的极线。根据假设，由于$CC_1$经过$O$点，$CC_1$的极点$M'$在直线$K'L'$上。所以点$K'$,$L'$,$M'$共线，根据德札尔格定理(§2,问题22)，直线$A'A_1'$,$B'B_1'$,$C'C_1'$共点，这就是我们所要证的。

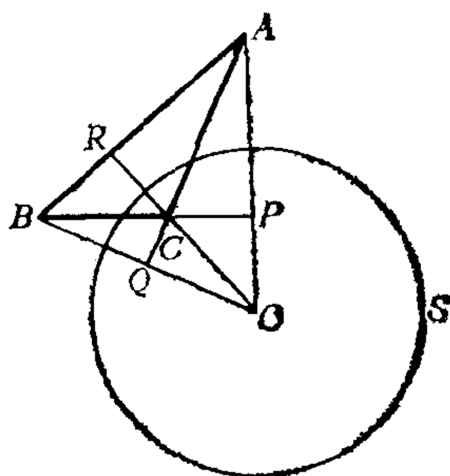



图 184

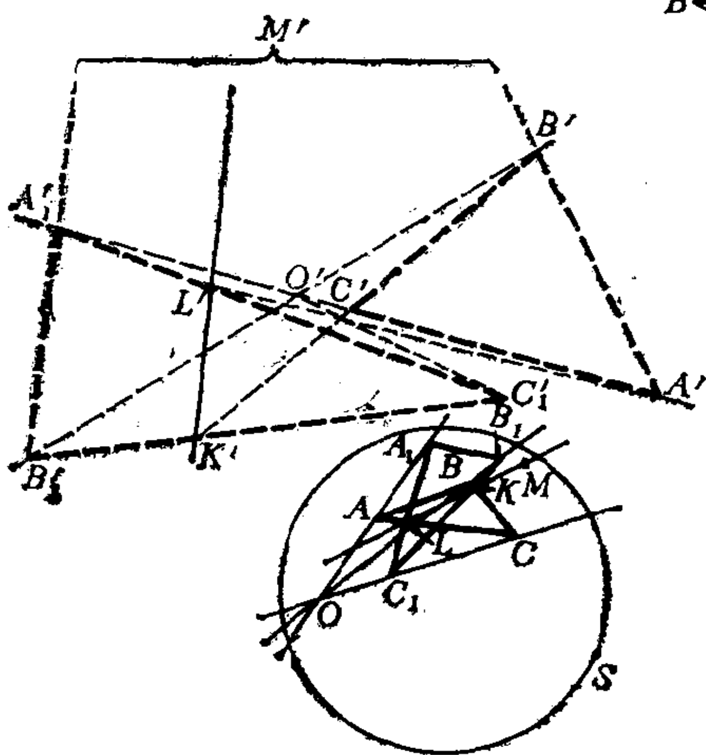



图 183

59. 考虑三角形$ABC$，它关于以$O$为中心的圆$S$是自配极的(图184)。由于$A$的极线$BC$与$OA$垂直，$O$在$\triangle ABC$的

高线$AP$上。类似地，$O$也在其它两条高线$BQ$和$CR$上。因此$O$是$\triangle ABC$的垂心。其次，由于$A$和$P$，$B$和$Q$，$C$和$R$中的每一对点都在$O$的同一侧，所以$\triangle ABC$是钝角三角形。使得一个钝角三角形$T$关于它是自配极的圆$S$是唯一的，这是因为它的中心$O$是$T$的高线的交点，而它的半径$r$由关系$r^2=OA\cdot OP=OB\cdot OQ=OC\cdot OR$确定(参看问题51)。(最后三个乘积之所以相等，是由于$\triangle OAQ\backsim\triangle OBP$，$\triangle OAR\backsim\triangle OCP$。容易验证：$r=2R\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$，其中$R$是$\triangle ABC$的外接圆半径。)

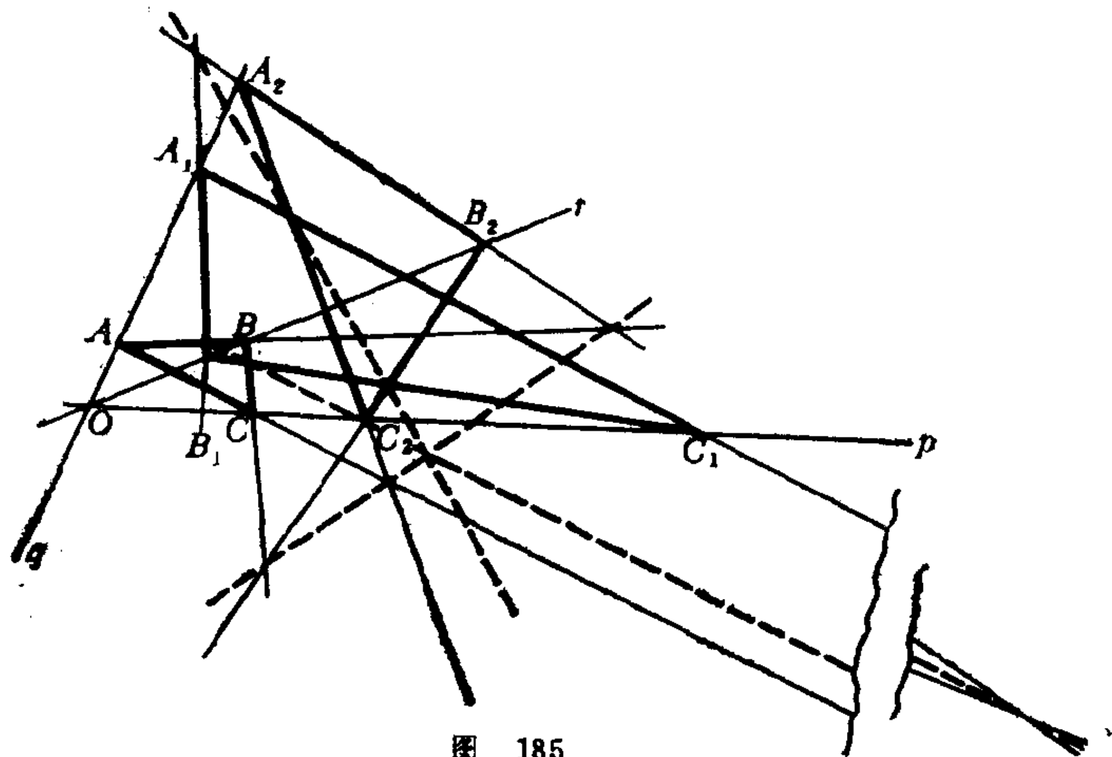



图 185

60．在配极下问题17(a)和17(b)中的定理互相变换（因此只要证明其中的一个就够了）。问题21(a)和21(b)中的定理以及问题22的定理及其逆定理也都互相变换。关于后一对定理，由于两个陈述是互相等价的（参看问题22的解答后面的附注），作配极并不能导致任何新的结果。问题23中的定理也变成一个等价的定理（由于这个定理实际上与问题22中

的定理相同；看问题23的解答）。类似地，对问题25和26中的定理作配极也不能得到新的结果；在配极下这些定理变成它们自己（在§2中陈述的定理经过对偶得到新的表述除外，术语“透视的三角形”指的是从一条直线而不是从一个点透视的三角形；从建立这两个概念的等价性的德札尔格定理来看，这种改变没有什么关系）。

在配极下问题27中的定理变成下列定理：如果三个三角形 $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ 放在一个平面上，使得点 $A, A_1, A_2$ 在直线 $q$ 上，$B, B_1, B_2$ 在直线 $r$ 上，$C, C_1, C_2$ 在直线 $p$ 上，并且直线 $p, q, r$ 共点(图185)，则由德札尔格定理，包含三角形 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$，$ABC$ 和 $A_2B_2C_2$，$A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 的对应边的交点的三条直线共点；换句话说，**如果三个两两透视的三角形的透视中心重合，则它们的透视轴共点。**

在问题28中的定理变成一个等价的定理（希望读者把它叙述出来）。要弄清楚这一点，只须注意在问题28的陈述后面所给出的另外两种陈述是互相对偶的。

61．这个问题是§2中问题24(b)的对偶；所以，一种解法是对 $n$ 条直线和 $n$ 个点作一次配极变换（关于圆 $S$）．直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 变成 $n$ 个共线的点 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，而点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 则变成 $n$ 条直线 $m_1, m_2, \cdots, m_n$。至此，我们可以知道（问题24(b)）如何在由直线 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 构成的 $n$ 边形中作一个内接 $n$ 边形 $B_1B_2\cdots B_n$，使得它的边分别经过点 $L_1, L_2, \cdots, L_n$。然后，从这个 $n$ 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 通过关于 $S$ 的配极，可以得到所要的 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$。

这个问题也可以用另一种方法来解。这种方法不需要作辅助的 $n$ 边形 $B_1B_2\cdots B_n$。在解问题24(b)时我们曾经证明，如果一个 $n$ 边形的 $n-1$ 个顶点在 $n-1$ 条定直线上，并

且它的边分别经过共线的$n$个定点，则它的第$n$个顶点在一条定直线$l$上.这条直线可以通过作两个这种$n$边形找出来。利用对偶原理，我们可以断定：假如一个$n$边形的$n-1$条边分别经过$n-1$个点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$，并且它的顶点分别在$n$条共点的直线$l_1, l_2, \cdots, l_n$上，则它的第$n$条边经过一个定点$M$($M$或是通常的点，或是无穷远点)。这个点$M$可以通过作两个这样的$n$边形确定。作$M$和$M_n$的连线，我们就可以得到所要的$n$边形$A_1A_2\cdots A_n$的边$A_nA_1$。不难确定这个多边形的其它的边。如果$M$是通常点并且不与$M_n$重合，则这个问题有唯一解。如果$M$与$M_n$重合，这个问题不确定。如果$M_n$是一个无穷远点，则当由$M_n$所确定的方向与$l_1$或$l_n$不平行时，这个问题有唯一解，否则无解。

62. 设$A_1A_2A_3A_4$是一个四边形，$n$是它的对边交点的连线，点$P$和$Q$是它的对角线$p$和$q$与$n$的交点，$b_1, b_2, b_3, b_4$是它的顶点到$P$和$Q$的连线。又设$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$是四边形$A_1A_2A_3A_4$的顶点到由直线$b_1, b_2, b_3, b_4$构成的外接四边形$B_1B_2B_3B_4$的顶点的连线（看图186）。根据对偶原理，从问题36(a)—(d)中的定理可以推出：

(a) $m_1$和$m_5$，$m_2$和$m_6$，$m_3$和$m_7$，$m_4$和$m_8$的交点在直线$n$上。

(b) $m_2$和$m_3$，$m_6$和$m_7$的交点在$q$上，$m_1$和$m_8$，$m_4$和$m_5$的交点在$p$上。

(c) $m_1$和$m_2$，$m_3$和$m_8$，$m_4$和$m_7$，$m_5$和$m_6$的交点在对角线$A_1A_3$和$A_2A_4$的交点同边$A_1A_4$和$A_2A_3$的交点的连线上；$m_1$和$m_6$、$m_7$和$m_8$，$m_3$和$m_4$，$m_2$和$m_5$的交点在对角线$A_1A_3$和$A_2A_4$的交点同边$A_1A_2$和$A_3A_4$的交点的连线上。

(d) $m_1$和$m_3$，$m_5$和$m_7$，$b_4$和$m_2$，$b_2$和$m_6$；$m_2$和$m_4$，

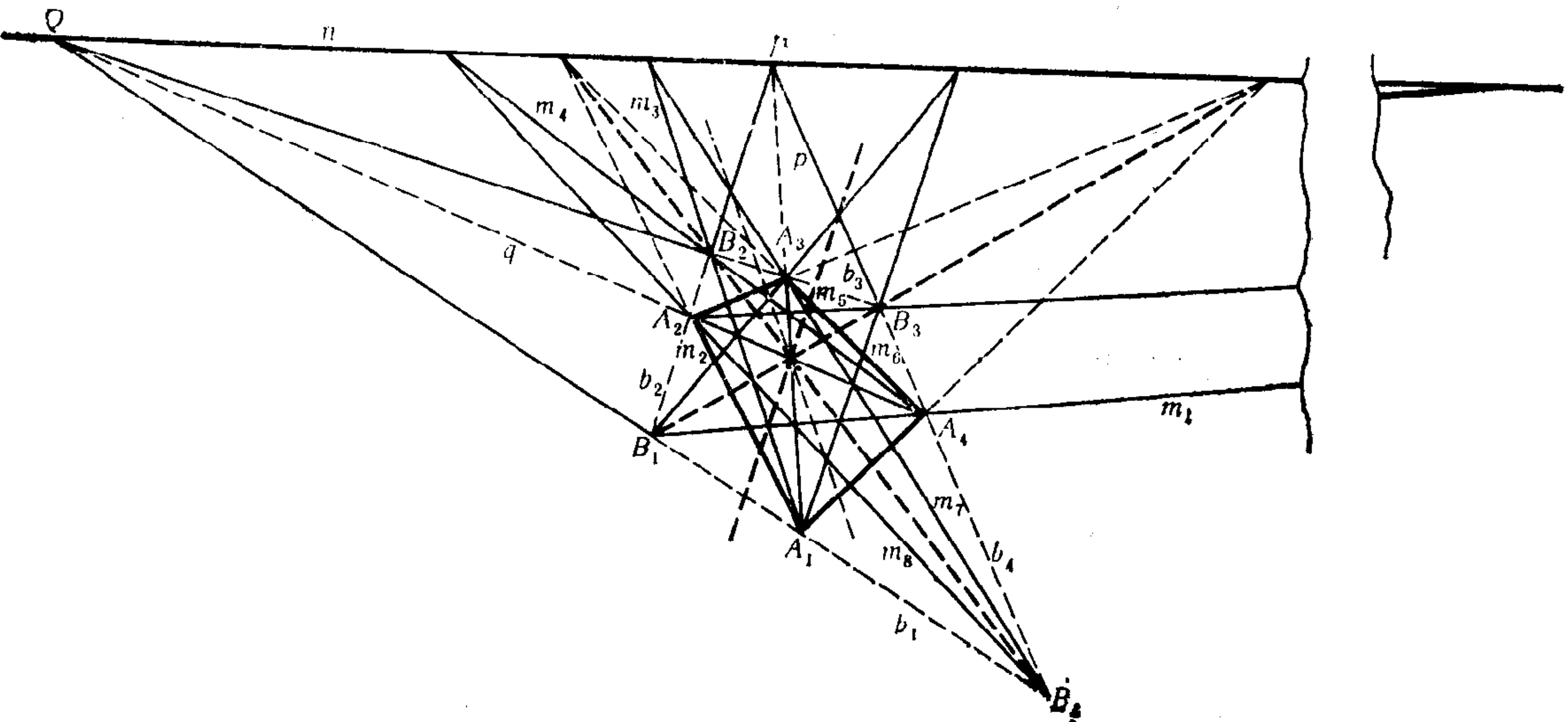



图 186

$m_6$和$m_8$，$b_4$和$m_3$，$b_2$和$m_7$；$m_3$和$m_5$，$m_1$和$m_7$，$b_1$和$m_4$，$b_3$和$m_8$；$m_4$和$m_6$，$m_2$和$m_8$，$b_1$和$m_5$，$b_3$和$m_1$的交点，分别在经过对角线交点的四条直线上。

利用对偶原理，从问题37(a)—(c)中的定理可以推出下列定理。设$ABCD$是一个四边形，1是经过顶点$A$的直线，2是连接$B$到直线$CD$和1的交点的直线，3是连接$C$到直线$DA$和2的交点的直线，4是连接$D$到直线$AB$和3的交点的直线，等等（图187）．则

(a) 绕这个四边形的所有顶点三周所得到的直线13与初始直线1重合（显然，这个定理等价于问题37(a)中的定理）．

(b) 直线1和7，2和8，3和9等等的交点在连接这个四边形对边交点的直线上。

(c) 直线1和2，7和8；2和3，8和9；3和4，9和10等等的交点的连线，经过这四边形的对角线的交点。

问题38(b)中的定理变成下列定理：从一直线$o$与$\triangle ABC$的边的交点到对顶点作连线，设$A_1B_1C_1$是由这三条直线所确定的三角形。命$O$是任意一点，$a_1,b_1,c_1$是从$\triangle A_1B_1C_1$的顶点到$O$点的连线，并设$A_2,B_2,C_2$是直线$a_1,b_1,c_1$同

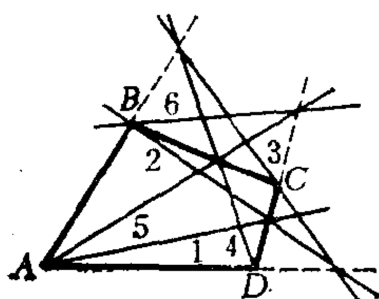



图 187

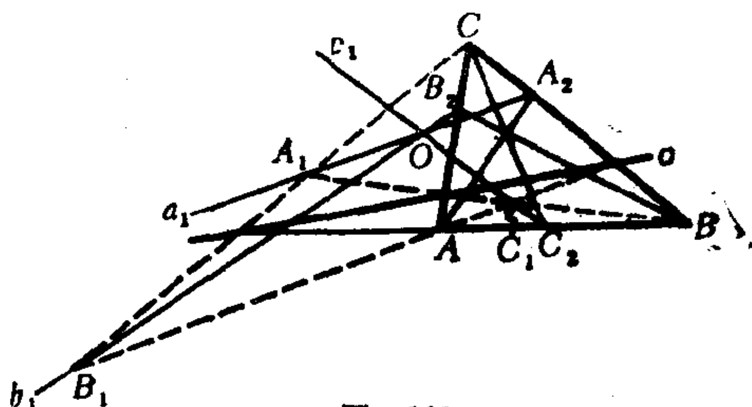



图 188

$\triangle ABC$ 的对应边的交点（图188）．则直线 $AA_2, BB_2, CC_2$ 交于一点。

63．在配极变换下，问题39(a)中的定理变成下述定理．设 $E, F, G$ 是$\triangle ABC$ 的边与它的内切圆的切点，则$\triangle ABC$ 的边与$\triangle EFG$ 的对应边的交点共线（图189）．

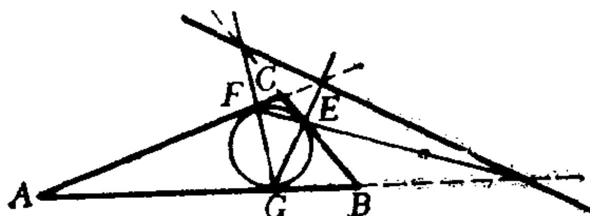



图 189

问题39(b)中的定理变成下述定理．设 $ABC$ 是一个三角形，$S$ 是与 $AB, BC, AC$ 相交的圆。又设 $a_1, b_1, c_1$ 是从 $A$，$B$，$C$ 分别到 $S$ 的切线的切点的连线（图190）．则 $a_1, b_1, c_1$ 与$\triangle ABC$ 的对应边的交点共线①．

问题40(a)中的定理变成下述定理．设 $A_1B_1C_1D_1$ 是圆 $S$ 的外切四边形，$A, B, C, D$ 是它的边与 $S$ 的切点(图191)．则四边形 $ABCD$ 的对边的交点在 $A_1B_1C_1D_1$ 的对边交点的连线上。在一次配极下问题40(b)中的定理变成它自身。

问题41(a)—(c)中的定理变成下列定理．设 $ABCD$ 是圆 $S$ 的外切四边形，$l$ 是它的对边交点的连线，$m$ 和 $n$ 是由这个四边形的对角线所确定的直线．则：

(a) 如果 $S$ 的外切三角形的两个顶点在三条直线 $l$，$m$，$n$ 中的两条上，则第三个顶点在其中的另一条直线上。

(b) $S$ 有无穷多个其对角线在直线 $m$ 和 $n$ 上的外切四边

① 根据德札尔格定理，从问题39(a)和(b)中的定理经过配极所得到的定理等价于在这些问题中所陈述的结果。

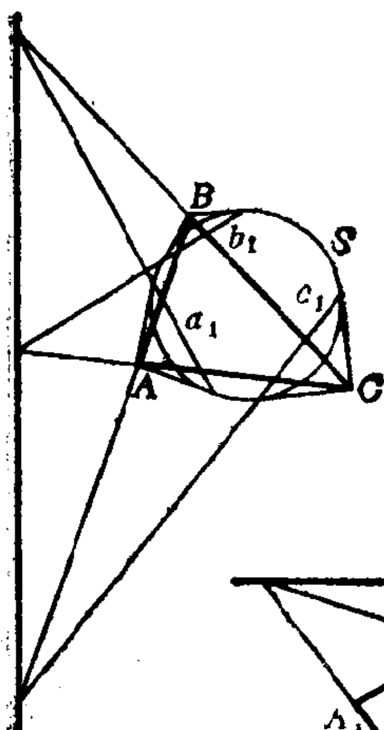



图 190

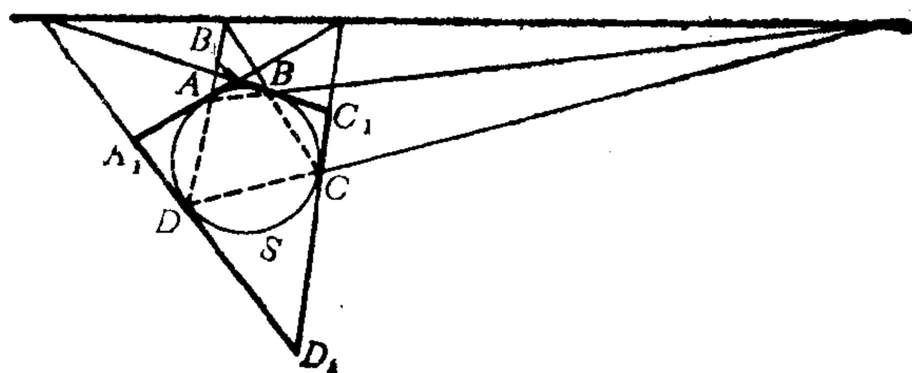
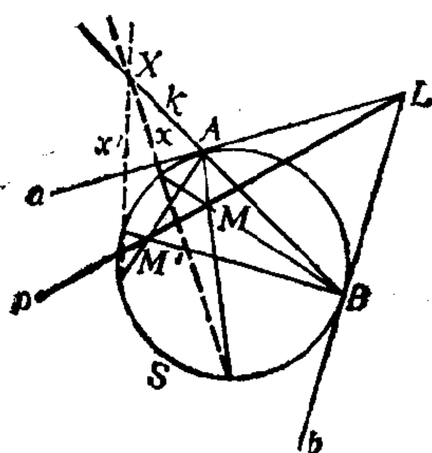
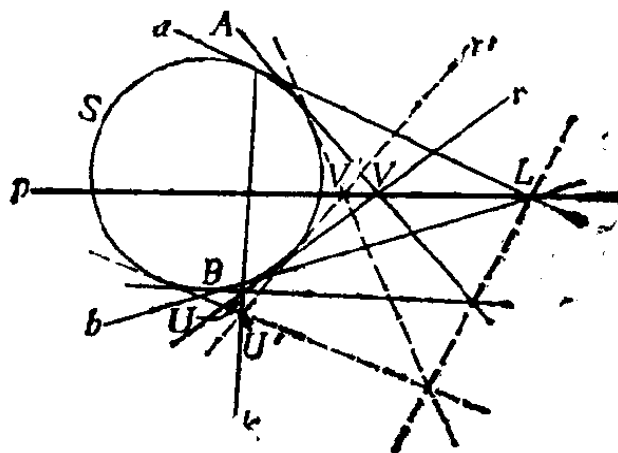



图 191




(a)




(b)

图 192

形。所有这些四边形的对边交点的连线和 $l$ 重合。

(c) $S$ 有无穷多个外切四边形，它们都有一条对角线在 $m$ 上，并且对边交点的连线都是 $l$。这种四边形的另一条对角线在 $n$ 上。

问题43(a)和(b)中的定理变成下列定理。给定一个圆 $S$ 和 $S$ 外的一个点 $L$，以及经过 $L$ 的一条直线 $p$；$k$ 表示从 $L$ 到 $S$ 的切线的切点 $A$ 和 $B$ 的连线。则有

(a) 假若 $M$ 是 $p$ 上的动点，则从 $M$ 到 $A$ 和 $B$ 的每一对连线同 $S$ 的另外一对交点的连线 $x$ 都和 $k$ 交于一个定点 $X$ [图192(a)]。

(b) 假若 $S$ 的一条切线 $r$ 交 $p$ 和 $k$ 于点 $V$ 和 $U$，则从 $U$ 和 $V$ 到 $S$ 的另一条切线的交点在经过 $L$ 的一条直线上 [图192(b)]。

问题45中的定理变成下述定理。设 $a$ 和 $a_1$，$b$ 和 $b_1$，$c$ 和 $c_1$ 分别是从直线 $o$ 上的点 $K$，$L$，$M$ 到圆 $S$ 的切线，则从


图 193


图 194

由 $a$，$b$，$c$ 所构成的三角形（图193中的阴影部分）的顶点到 $x$ 与 $a_1$，$b_1$，$c_1$ 的对应的交点的连线交于 $o$ 上的一点。

问题46和47中的定理在配极下互相变换。

问题50中的定理变成下述定理。设 $r$，$s$，$t$ 是△$ABC$的外接圆在顶点$A$，$B$，$C$的切线，$M$，$N$，$P$分别是边$BC$，$CA$，$AB$与一条直线$q$的三个交点。直线$AM$，$BN$，$CP$与这个外接圆的另一个交点以$R$，$S$，$T$表示。则直线$RS$和$t$，$ST$和$r$，$TR$和$s$的交点在$q$上(图194)。

64．在配极变换下问题42中的定理变成下述命题：设$p$是一条直线，$S$是一个圆，从$p$上一点到$S$的每一对切线确定一条弦，则所有这些弦经过同一个点（图195）。

65．这个问题与前一节中的问题44对偶（在直线不与$S$相交的情形对应于问题44(a)，在与$S$相交的情形对应于问题44(b)）。因此这个问题可以解答如下：关于给定圆$S$的配极将这个问题变成问题44。在解决后一个问题以后我们得到一个四边形，从这个四边形通过配极可以得到所要的四边形。然而，在目前的情形下，我们无须首先解问题44，这个问题的解基于一个命题，这个命题在配极变换下变成下述命题：假如给定圆$S$的一个外切四边形$ABCD$的顶点$A$和$C$

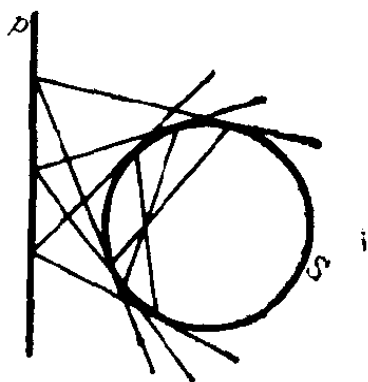



图 195

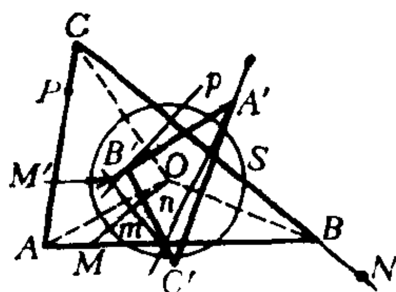



图 196

在直线 $l$ 上，且顶点 $B$ 在直线 $l_1$ 上，则顶点 $D$ 在某一条定直线 $m$ 上。直接利用这个命题就不难解答我们的问题（参看问题44(a)和(b)的解答）。

66. 设 $M,N,P$ 分别是在 $\triangle ABC$ 的边 $AB,BC,CA$ 或其延长线上的三个点（图196）。在配极变换下 $\triangle ABC$ 变成 $\triangle A'B'C'$，它的边 $a,b,c$ 分别是点 $A,B,C$ 的极线，而点 $M,N,P$ 分别变成经过点 $C',A',B'$ 的直线 $m,n,p$。设 $M',N',P'$ 是 $m,n,p$ 同 $\triangle A'B'C'$ 的边的交点。我们想要找出表达式

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP} \quad 和 \quad \frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}$$

之间的关系。

显然，比值 $A'M'/B'M'$ 等于商 $(A'M'/C'M')/(B'M'/C'M')$。由正弦定律，我们有

$$\left|\frac{A'M'}{C'M'}\right| = \frac{\sin\angle A'C'M'}{\sin\angle C'A'M'}$$

和

$$\left|\frac{B'M'}{C'M'}\right| = \frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle C'B'M'}.$$

由此可以推出 $A'M'/B'M'$ 的绝对值等于

$$\frac{\sin\angle A'C'M'}{\sin\angle C'A'M'}\Big/\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle C'B'M'}$$

$$=\frac{\sin\angle C'B'M'}{\sin\angle C'A'M'}\Big/\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle A'C'M'}.$$

大家知道，$A$ 的极线垂直于 $OA$，其中 $O$ 是作配极变换的圆 $S$ 的中心（参看第86页）。因此 $C'B'\perp OA, C'A'\perp OB$，

$A'B' \perp OC$，所以

$\sin\angle C'B'M' = \sin\angle AOC$，　$\sin\angle C'A'M' = \sin\angle BOC$。

（$\angle C'B'M'$ 和 $\angle AOC$的边互相垂直，对于 $\angle C'A'M'$ 和 $\angle BOC$ 也是如此，因此它们相等或互补，从而它们的正弦相等.）于是

$$\frac{\sin\angle C'B'M'}{\sin\angle C'A'M'} = \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}.$$

由于$C'M' \perp OM$，类似地有

$$\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle A'C'M'} = \frac{\sin\angle AOM}{\sin\angle BOM}.$$

下面对后一个表达式再作些变化。为此我们用两种方法计算$\triangle AOM$和$\triangle BOM$的面积，并作它们之比：

$$\frac{S_{AOM}}{S_{BOM}} = \left|\frac{\frac{1}{2}AO \cdot OM \cdot \sin\angle AOM}{\frac{1}{2}BO \cdot OM \cdot \sin\angle BOM}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}AM \cdot h_{AB}}{\frac{1}{2}BM \cdot h_{AB}}\right|$$

（在这里 $h_{AB}$表示$\triangle AOM$和$\triangle BOM$的公共高）。从后一个等式我们容易得到

$$\frac{\sin\angle AOM}{\sin\angle BOM} = \left|\frac{OB \cdot AM}{OA \cdot BM}\right|.$$

因此比值 $A'M'/B'M'$的绝对值等于

$$\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC} \Big/ \left(\frac{OB}{OA} \cdot \frac{AM}{BM}\right)$$

$$= \frac{1}{AM/BM} \cdot \left(\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC} \cdot \frac{OA}{OB}\right).$$

用类似的推导可以证明，比值 $B'N'/C'N'$ 和 $C'P'/A'P'$ 的绝对值分别等于

$$\frac{1}{BN/CN} \cdot \frac{\sin\angle BOA}{\sin\angle COA} \cdot \frac{OB}{OC}$$

和
$$\frac{1}{CP/AP} \cdot \frac{\sin\angle COB}{\sin\angle AOB} \cdot \frac{OC}{OA}.$$

把这三个式子乘起来，可以知道表示式

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} \quad 和 \quad \frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'}$$

的绝对值互为倒数。

现在只需要再弄清这些表达式的符号之间的关系。为简单起见，假定 $S$ 的中心 $O$ 点在 $\triangle ABC$ 的内部。我们有 $OA \perp B'C'$，$OB \perp A'C'$，$OM \perp C'M'$。这说明，若 $OM$ 介于 $OA$ 和 $OB$ 之间，则 $C'M'$ 在 $\angle A'C'B'$ 的外部，而如果 $OM$ 在 $\angle AOB$ 的外部，则 $C'M'$ 介于 $C'A'$ 和 $C'B'$ 之间（参看图196中这些直线的相互位置）。由此可知比值 $AM/BM$ 和 $A'M'/B'M'$ 反号。用同样的方法可以证明比值 $BN/CN$ 和 $B'N'/C'N'$，$CP/AP$ 和 $C'P'/A'P'$ 也反号。这就证明了表达式

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} \quad 和 \quad \frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'}$$

反号①。总之，我们有

$$(*) \qquad \frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} = -\frac{1}{\dfrac{AM}{BM} \cdot \dfrac{BN}{CN} \cdot \dfrac{CP}{AP}}.$$

根据配极的性质A，当且仅当点 $M$，$N$，$P$ 共线时，直

① 可以证明，当 $S$ 的中心在 $\triangle ABC$ 的外部时这个结论仍然成立。我们把对各种可能情况的讨论留给读者。

线 $A'N'$，$B'P'$，$C'M'$ 交于一点（或平行）。从这个事实和公式（*）可以推出，在配极变换下塞瓦定理和梅内劳斯定理互相变换。所以我们只需要证明其中的一个。

67．设 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 是两个透视的三角形，$AA_1$，$BB_1$，$CC_1$ 的交点O是透视中心（看第37页）．考虑关于以 $O$ 为中心的圆 $S$ 的配极$\Pi$。根据配极的性质B，$\Pi$将$\triangle ABC$ 和$\triangle A_1B_1C_1$ 变成其边两两平行的两个三角形．这样的三角形通过一个平移或一个中心相似互相变换(参看《几何变换》第一册，第一章，§1 和《拓扑学的首要概念》第14，15页）。但是这些三角形的对应顶点的连线共点或平行．根据配极变换的性质A，我们可以断定$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的对应边的交点共线．

利用对偶原理，从德札尔格定理的第一部分可以推出定理的第二部分，后者是说：假若两个三角形从一直线透视，则它们从一个点透视（要证明这一点，我们只要对与这个定理的第一部分相对应的图形关于任意一个圆作一次配极；参看问题60）。

68．关于圆 $S$ 作配极，$\triangle ABC$ 的边 $BC$，$CA$，$AB$ 变成 $S$ 上的点$A'$，$B'$，$C'$，而外切三角形 $ABC$ 则变成内接三角形 $A'B'C'$（即$\triangle ABC$ 的边变成 $\triangle A'B'C'$ 的顶点，反之亦然)．切线 $l$ 变成 $S$ 上的一点 $L$，点$M$，$M$，$P$变成直线 $LA'$，$LB'$，$LC'$，点$M_1$，$N_1$，$P_1$ 变成经过$A'$，$B'$，$C'$ 并且垂直于 $A'L$，$B'L$，$C'L$的直线；后一个结论是从配极变换的性质$C$ 得到的（图197）。这个问题中所陈述的定理变成下述定理：直线 $m_1$、$n_1$，$p_1$ 交于$S$ 上的一个点。我们只需证明这两个定理中的一个就够了．然而，直线$m_1$，$n_1$，$p_1$交于$S$上一点是十分明显的。事实上，从$m_1\perp A'L$ 可以推出$m_1$与$S$交于$L$的对径点$L_1$．类似地，直线$n_1$和$p_1$也必定经过$L_1$。(注意，由于$L$和$L_1$是 $S$

的对径点，可知在图83中$l_1 \parallel l$；参看配极的性质B。）

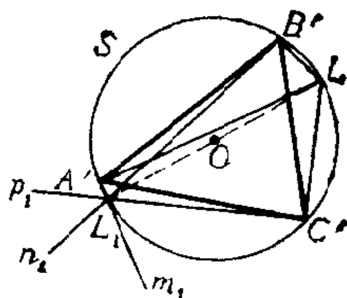


图 197

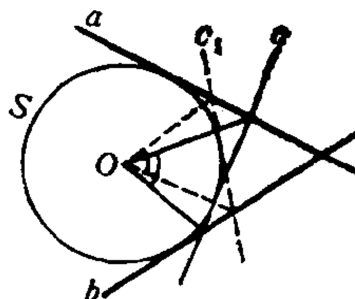


图 198

69．由圆$S$的两条切线$a$和$b$在变动的第三条切线$c$上截得的线段对$S$的中心所张的圆心角是一个定角（图198；参

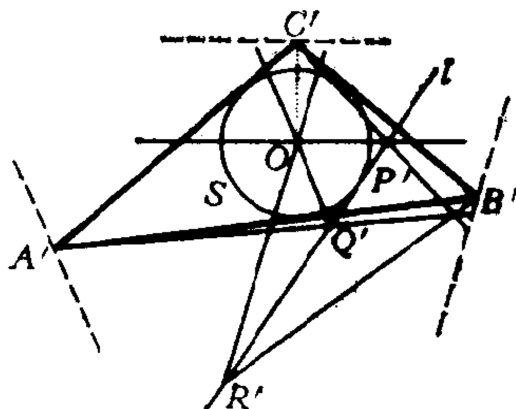


图 199

看图81(b))。

70．在关于圆$S$的配极下，内接三角形$ABC$变成外切三角形$A'B'C'$，而$S$上的点$L$则变成$S$的切线$l$，并且从$L$到$AB$的垂线的垂足$P$变成直线$C'P'$，其中$P'$是$l$上使$\angle C'OP' = 90°$的一个点，即$P'$是经过$O$点并与在顶点$C'$的外角平分线相平行的直线同$l$的交点($OC'$是在$C'$的内角的平分线，看图199)．所以我们得到下述**定理**：设$O$是$\triangle A'B'C'$的内切圆$S$的中心，$l$是$S$的一条切线，经过$O$点分别作与三角形$A'B'C'$之各外角平分线相平行的直线，它们与$l$分别交于点

$Q'$, $R'$, $P'$，则它们与对应顶点的连线 $A'Q'$，$B'R'$，$C'P'$ 交于一点（图199）。

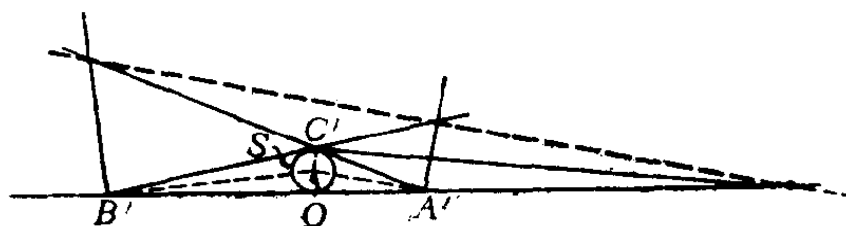



图 200

71. 设 $S$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，在关于 $S$ 的配极变换下，$\triangle ABC$ 变成 $S$ 的外切三角形 $A'B'C'$； $\triangle ABC$ 的边的中点变成分别经过 $A'$，$B'$，$C'$ 并与角平分线 $OA'$，$OB'$，$OC'$ 垂直的直线（$O$是$S$的中心），即变成$\triangle A'B'C'$的外角平分线；而 $\triangle ABC$ 的中线则变成 $\triangle A'B'C'$ 的外角平分线与它的对边的交点（图200）。所以我们得到下述**定理**：三角形的外角平分线同它的对边的交点共线。

72. 在关于圆$S$ 的配极下，平行四边形$ABCD$变成四边形$A'B'C'D'$，后者的对角线交于$S$的中心$O$点（参看配极变换的性质B）。平行四边形 $ABCD$ 的对角线$AC$和$BD$对应于四边形 $A'B'C'D'$的对边交点$P$和$Q$。如果这个平行四边形的对角线互相垂直（即它是一个菱形），则线段$PQ$对$O$点张成直角（图201；参看配极的性质 C）。在配极下这个问题中所阵述的定理变成下述**定理**：假若四边形$A'B'C'D'$的对边交点为 $P$ 和 $Q$，线段 $PQ$ 对于对角线的交点 $O$ 张成直角，则 $OP$ 和

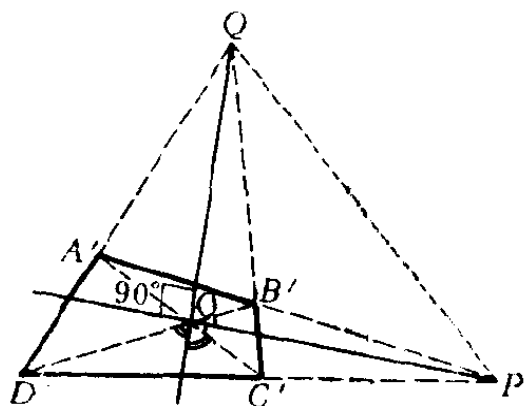



图 201

$OQ$ 平分这个四边形的对角线所夹的角。

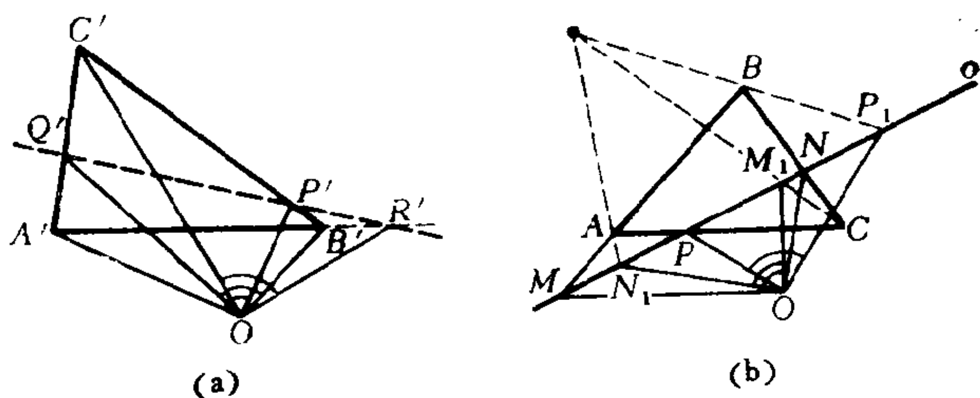



图 202

73. (a)在关于以 $O$ 为中心的圆 $S$ 的配极下，$\triangle ABC$ 变成 $\triangle A'B'C'$，而且 $\triangle ABC$ 的高线变成 $\triangle A'B'C'$ 的边上的点 $P'$, $Q'$, $R'$，它们使得 $\angle A'OP'=\angle B'OQ'=\angle C'OR'=90^\circ$ (图202(a))；参看配极变换的性质C)。如此我们就有下述**定理**：设 $O$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点，则经过 $O$ 点分别垂直于 $OA$, $OB$, $OC$ 的直线同这个三角形的对应边的交点共线。

**注** 对图202(a)作配极可以得到下述有趣的**定理**：设 $o$ 和 $O$ 分别是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一条直线和一个点，而 $M$, $N$, $P$ 是直线 $o$ 同这个三角形的边 $AB$, $BC$, $CA$ 的交点，又设 $M_1$, $N_1$, $P_1$ 是 $o$ 上的三个点，使得 $\angle MOM_1=\angle NON_1=\angle POP_1=90^\circ$，则直线 $AN_1$, $BP_1$, $CM_1$ 共点[图202(b)]。

对这个定理再作一次配极（关于以 $O_1\neq O$ 为中心的任意一个圆），又可以得到一个新的（相当复杂的）定理，等等。

(b) 设 $l$ 是由直线 $m$ 和 $n$ 所夹的两个角之一的平分线。在关于以 $o$ 为中心的圆 $S$ 的配极下，直线 $m$, $n$, $l$ 变成共线

的点$M, N, L$，它们使得线段$ML$和$NL$对$O$点所张的角相等或互补（配极的性质C）；换句话说，$L$是$MN$与直线$OM$和$ON$所夹的两个角之一的平分线的交点。由于我们不知道这两个角中哪一个的平分线包含点$L$，所以考虑由$m$和$n$所构成的两个角的平分线。它们变成$MN$与由$OM$和$ON$所构成的两个相邻角的平分线的交点。所以，比较方便的是考虑$\triangle ABC$的外角的平分线，并将关于这些角平分线的交点的**定理**陈述如下：$\triangle ABC$的内角和外角的六条平分线三条一组地交于四个点。在配极变换下，这个定理变成下述**定理**：设$A, B, C, O$是四个点，其中设有三个共线。则由直线$OA$和$OB$，$OB$和$OC$，$OC$和$OA$所夹的角的六条平分线与$\triangle ABC$的对应边的交点三点一组地在四条直线上[图203(a)]。

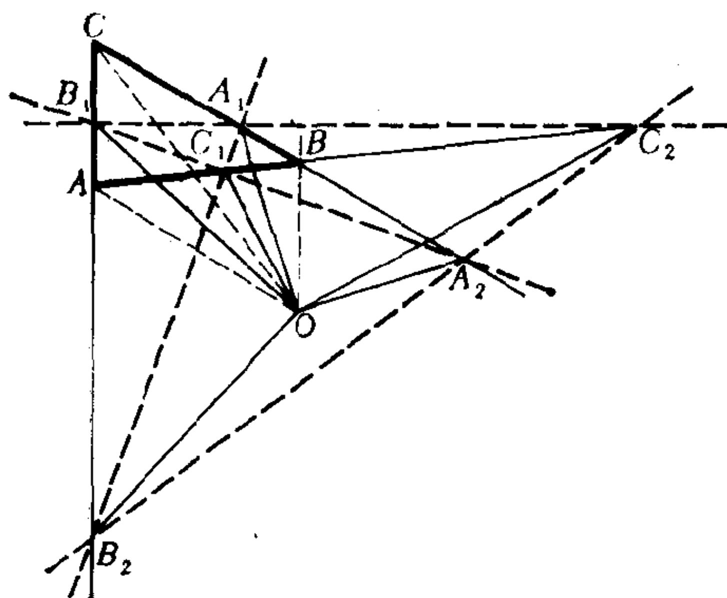



图 203(a)

**注** 对图203(a)作一次配极可以得到下述**定理**：在$\triangle ABC$的平面上，设$o$是一条直线，$O$是一个点，$M, N, P$分别是$o$同边$AB, BC, CA$的交点，并设$M_1$和$M_2$，$N_1$和$N_2$，$P_1$和

$P_2$分别是由$ON$和$OP$，$OP$和$OM$，$OM$和$ON$所夹的角的平分线与$o$的交点。则六条直线$AN_1$,$AN_2$,$BP_1$,$BP_2$,$CM_1$,$CM_2$三条一组地交于四个点[图203(b)]；参看上面一个小题后面的注)。

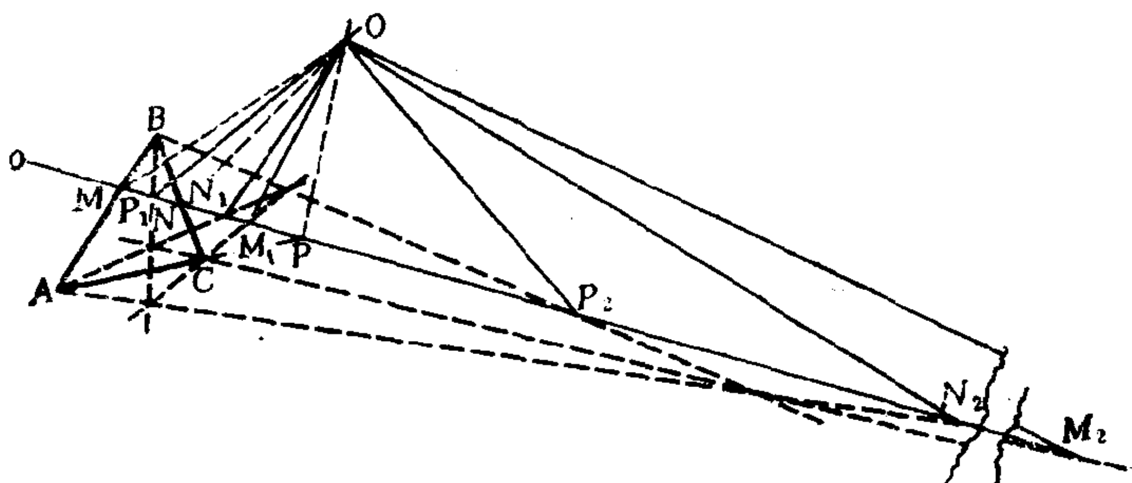



图 203(b)

5

75. 在第41页问题28中陈述了帕普斯定理的三种模式，现在来证明模式(a)。在直线$l_1$和$l_2$上的点分别用$A$, $C$, $E$和$B$, $D$, $F$表示；直线$AB$和$ED$，$CD$和$AF$，$EF$和$CB$的交点依次记作$K$,$M$,$L$；$AB$和$CD$，$CB$和$ED$，$l_1$和$l_2$的交点记作$G$,$H$,$O$；$KL$和$CD$的交点用$M'$表示（图204；在这里用的记号与问题28中的不同，但是这样容易把这个解答与问题80的解答作比较）。（其中可能有某些点在无穷远。）我们必须证明$M'$和$M$重合。以$A$为中心将直线$CD$射影到$l_2$上，这时$C$,$G$,$D$,$M$分别变成$O$,$B$,$D$,$F$。再以$E$为中心将$l_2$射影到直线$CB$上，点$O$,$B$,$D$,$F$变成$C$,$B$,$H$,$L$。以$K$为中心从$CB$回到直线$CD$上的射影，将点$C$,$B$,$H$,$L$变到点$C$,$G$,$D$,$M'$。这三个射影依次作乘积，其结果是直线

$CD$ 的一个射影变换，它将点 $C,G,D,M$ 分别变为点$C,G,D,M'$.根据射影变换的基本性质(看第110—112页)，保持三个点不动的直线的射影变换（在这里 $C,G,D$ 是不动点）必是恒同变换。所以点$M$和 $M'$ 重合。

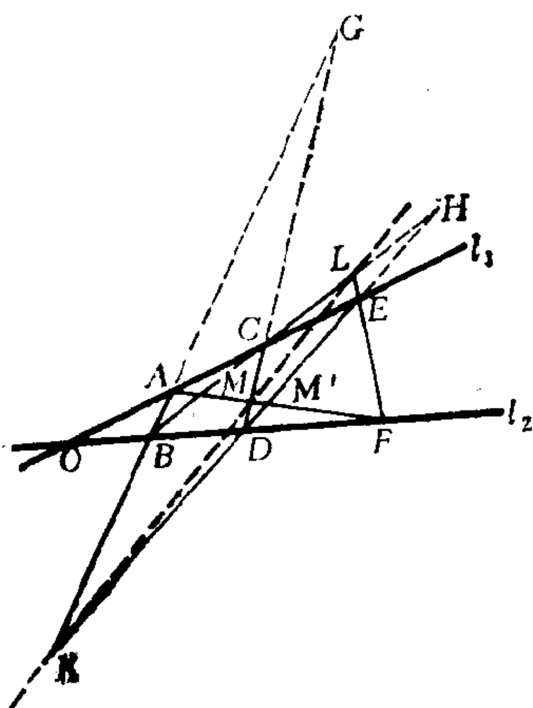



图 204

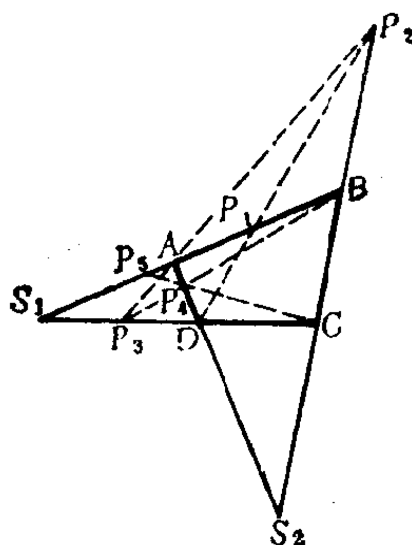



图 205

**76.** 以 $S_1$ 和 $S_2$ 表示四边形 $ABCD$ 的对边的交点（图205）。以$D$为中心从直线 $AB$ 到 $BC$ 上的射影，把点 $S_1,A,B$ 变成 $C,S_2,B$。以$A$为中心从 $BC$ 到 $DC$ 上的射影，又把 $C,S_2,B$ 变成 $C,D,S_1$.以$B$为中心从 $DC$ 到 $DA$ 上的射影，把 $C,D,S_1$ 变成 $S_2,D,A$。最后，以$C$为中心从 $DA$ 回到$AB$上的射影，又把 $S_2,D,A$ 变成 $B,S_1,A$。这四个射影的乘积是直线 $AB$ 的一个射影变换，它将 $S_1,A,B$ 变成 $B,S_1,A$。这个射影变换的平方将 $S_1,A,B$ 变成 $A,B,S_1$，它的立方则将 $S_1,A,B$ 变成 $S_1,A,B$，所以必定是一个恒同变换。由此可以知道，在绕这个四边形的边三周以后，我们不变地回到出发点；特别，在边 $AB$ 上的点 $P_1$ 和 $P_{13}$ 重合。

77. (a) 这个问题是前一个问题的特殊情形。

(b) 我们以 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 表示这个六边形的边的延长线的交点[图206(a)]，与方向 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4$ 相对应的无穷远点以$\infty_1, \infty_2, \infty_3$ 表示。以 $A_6$ 为中心从直线 $A_1A_2$ 到 $A_2A_3$ 上的射影，将点 $A_1, A_2, B_6, \infty_1$ 分别变成 $B_1, A_2, \infty_2, A_3$。以 $A_1$ 为中心从直线 $A_2A_3$ 到$A_3A_4$ 上的射影又将$B_1, A_2, \infty_2, A_3$ 变成 $\infty_3, B_2, A_4, A_3$。从直线 $A_3A_4$ 上的点$\infty_3, B_2, A_4, A_3$ 相继用适当的射影可以先变成 $A_4A_5$ 上的点 $A_5, \infty_1, A_4, B_3$；又变成 $A_5A_6$ 上的点 $A_5, A_6, B_4, \infty_2$；再变成 $A_6A_1$ 上的点 $B_5, A_6, \infty_3, A_1$；最后则变成原来直线 $A_1A_2$ 上的点 $\infty_1, B_6, A_2, A_1$。这六个射影的乘积是 $A_1A_2$ 的一个射影变换，它将 $A_1, A_2, B_6, \infty_1$ 变成 $\infty_1, B_6, A_2, A_1$。这个变换的平方将 $A_1, A_2, B_6, \infty_1$ 变成 $A_1, A_2, B_6, \infty_1$，所以是直线 $A_1A_2$ 上的恒同变换（要证明这个结论成立，只要知道所说的变换有三个不动点就够了；参看问题76的解答）。

(c) 以$B_1, B_2, \cdots, B_{10}$ 表示这个十边形的边的延长线的交点；$C_1, C_2, \cdots, C_{10}$如图206 (b)所示，在直线 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots$ 上的无穷远点以$\infty_{12}, \infty_{23}, \cdots$ 表示。以$A_{10}$ 为中心的射影将直线 $A_1A_2$ 上的点 $A_1, A_2, B_{10}$ 变成直线 $A_2A_3$ 上的点 $B_1, A_2, C_{10}$。相继以 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 为中心作射影，这些点先变成直线$A_3A_4$上

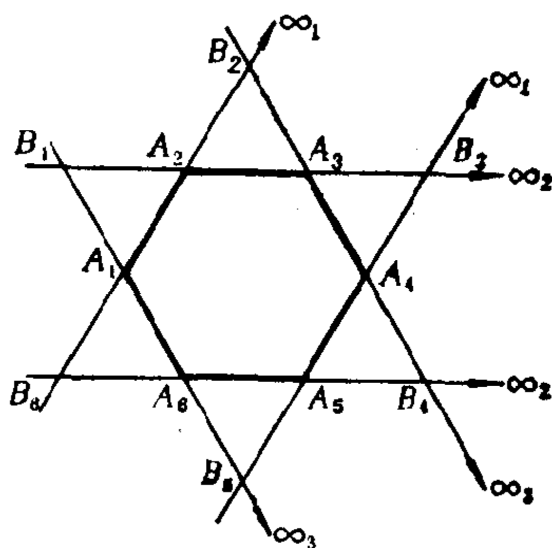


图 206(a)

的点 $C_1, B_2, \infty_{34}$；然后变成直线 $A_4A_5$ 上的点 $\infty_{45}, C_2, A_5$；又变成直线 $A_5A_6$ 上的点 $A_6, \infty_{56}, A_5$；再变成直线 $A_6A_7$ 上的点 $A_6, A_7, B_5$；随后变成直线 $A_7A_8$ 上的点 $B_6, A_7, C_5$；此后又变成直线 $A_8A_9$ 上的点 $C_6, B_7, \infty_{89}$；再又变成直线 $A_9A_{10}$ 上的点 $\infty_{910}, C_7, A_{10}$；接着又变成 $A_{10}A_1$ 上的点 $A_1, \infty_{101}, A_{10}$；最后则变成原来直线 $A_1A_2$ 上的点 $A_1, A_2, B_{10}$。这十个射影的乘积确定直线 $A_1A_2$ 的一个射影变换，它保持三个点 $A_1, A_2, B_{10}$ 不变，所以必定是 $A_1A_2$ 的恒同变换（参看（b）的解答）。

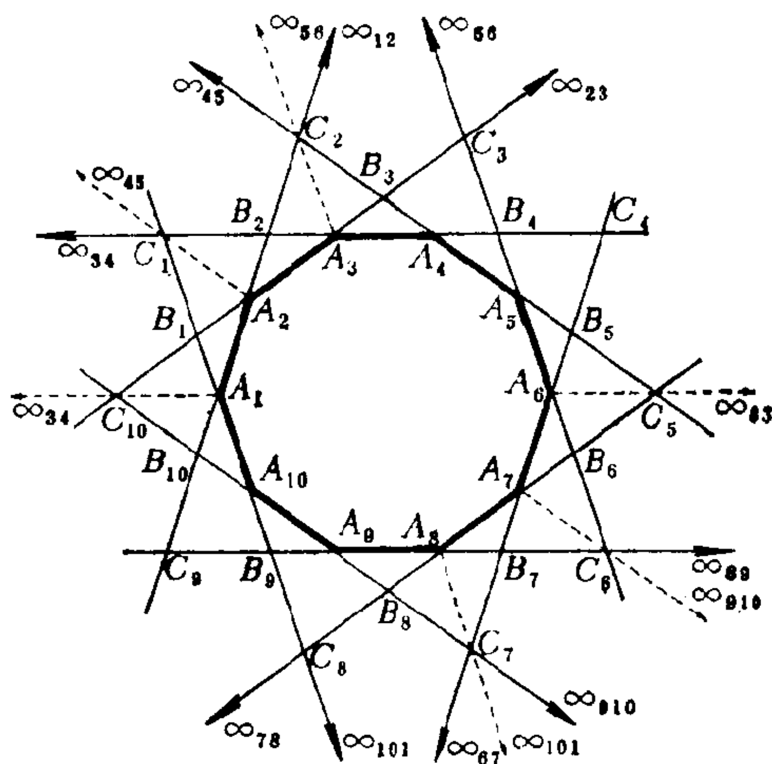



图 206(b)

78.（a）从点 $M$ 作圆 $S$ 到直线 $AB$ 上的射影，$S$ 上的点 $A, B, N, P$ 变成 $AB$ 上的点 $A, B, O, E$。从点 $Q$ 作 $S$ 到 $AB$ 上的射影将原来的四个点变成 $A, B, F, O$。由此可知四点组 $A, B$；$O, E$ 和 $A, B$；$F, O$ 的交比相等，即

$$\frac{AO/BO}{AE/BE}=\frac{AF/BF}{AO/BO}=\frac{BO/AO}{BF/AF}.$$

这说明四点组 $A,B;O,E$和$B,A$; $O,F$的交比相等．现在我们将四点 $A,B,O,E$ 对于弦 $AB$ 的中心$O$作反射，依次得到点 $B,A,O,F_1$，其中 $F_1$ 是$E$关于$O$的对称点。从而四点组 $B,A$; $O,F$ 和 $B,A$; $O,F_1$ 的交比相等，所以 $F=F_1$，这就是我们所要证的。

**注** 利用§3中的定理1，这个问题还有另一种解法．具体地说，将图93射影到平面 $\pi'$，使得圆$S$ 变成圆$S'$，并且点$O$变成 $S'$ 的中心 $O'$.然后根据中心射影的性质 C，容易证明四点组 $A,B$; $O,E$ 和 $B,A$; $O$, $F$ 的交比相等。

(b) 这是(a)的一个推广，它的证明与部分(a)的证明类似，我们把它留给读者．

**79.** 设$P$是一个点，$S$是一个圆。所谓$S$从$P$到它自身上的射影，指的是这样的一个变换，它将$S$上的点$M$变成$PM$与$S$的另一个交点$M'$（图207）．这个变换是一个射影变换．实际上，设$A$ 和 $A'$是一对对应点，$M$和 $M'$ 是另一对对应点，根据§4的定理1，$AM$和$A'M'$的交点 $M_1$ 在一条定直线 $p$ 上，$p$ 就是$P$点关于$S$的极线。它表明将$M$变成 $M'$ 的这个

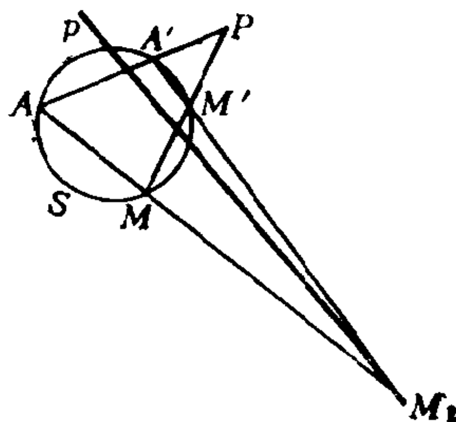



图 207

变换可以用如下的方式实现：先从$A$将$S$射影到直线 $p$上（这个射影将$M$变成$M_1$；图207)，然后从点$A'$将$p$射影

到$S$上（它将$M_1$变成$M'$）。因此从$M$到$M'$的这个变换是一个射影。这就是我们所要证的。

下面我们来证明问题41(a)—(c)中的定理。

(a) 考虑这个圆的如下一串射影变换：先从$P$点、然后从$Q$点、最后从$O$点将$S$射影到它自身上。容易看到，这些变换作用在这个内接四边形的顶点上的结果如下：$A\to B\to C\to A$，$B\to A\to D\to B$，$C\to D\to A\to C$，$D\to C\to B\to D$。这说明由它们所产生的射影变换[①]有四个不动点，所以是恒同变换（参看问题76,77的解答；要证明这个结论，实际上只需要找出这圆上的三个点在上述变换下保持不变就可以了）。由此可以推出，如果$S$从$P$到它自身上的射影将$S$的点$E$变为$F$，又从$Q$的射影将$F$变为$G$，则从$O$的射影将$G$变为$E$。但是这说明：假若一个内接三角形的两条边$EF$和$FG$分别经过点$P$和$Q$，则边$EG$经过$O$点。

用大致相同的方式可以证明：这个圆从中心$O,P,Q$到它自身上的一串射影的乘积是恒同变换（因为它保持四边形$ABCD$的顶点不动）。由此可以推出，假若一个内接三角形的两条边分别经过点$O$和$P$，则它的第三条边经过$Q$点。

(b) 考虑圆$S$的从点$P,Q$，再从$P$，再从$Q$到它自身上的一串射影。四边形$ABCD$的顶点变换如下：$A\to B\to C\to D\to A$，$B\to A\to D\to C\to B$，$C\to D\to A\to B\to C$和$D\to C\to B\to A\to D$。由此可知它们所产生的变换是恒同变换，所以，假如$S$到它自身上的从$P$点的射影将$A_1$变成$B_1$，从$Q$的射影将$B_1$变成$C_1$，以及再从$P$点的射影将$C_1$变成$D_1$，则从$Q$的射影将$D_1$变成$A_1$。这就说明，假若$S$的内接

① 圆（或直线）的射影变换的乘积仍然是射影变换（因为这种乘积显然不改变四个点的交比）。

四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边 $A_1B_1$ 和 $C_1D_1$ 经过 $P$ 点，而边 $B_1C_1$ 经过 $Q$ 点，则边 $D_1A_1$ 也经过 $Q$ 点。

以四边形 $ABCD$ 的对角线交点 $O$ 作为中心的圆 $S$ 到它自身上的射影，与 $S$ 从点 $P$ 和 $Q$ 到它自身上的一串射影等价。所作的四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线的交点也有同样的性质，所以这个交点必然和 $O$ 点重合。

(c) 这个问题的证明完全类似于问题41(b) 的证明，我们把它留给读者。

**80.** 以 $K, L, M, M'$ 分别表示 $AB$ 和 $DE$，$BC$ 和 $EF$，$CD$ 和 $FA$，$CD$ 和 $KL$ 的交点，并以 $G$ 和 $H$ 表示 $AB$ 与 $CD$，$BC$ 与 $DE$ 的交点(图208)。我们要证明 $M$ 和 $M'$ 重合。从 $A$ 点作直线 $CD$ 到圆 $S$ 的射影，把点 $G, C, D, M$ 变成点 $B, C, D, F$，在从 $E$ 点作 $S$ 到直线 $BC$ 上的射影下，这些点变成 $B, C, H, L$。在从 $K$ 点作直线 $BC$ 到 $CD$ 的射影下，后一组点又变成 $G, C, D, M'$。这说明 $M'$ 应当与 $M$ 重合(参看问题75的解)。

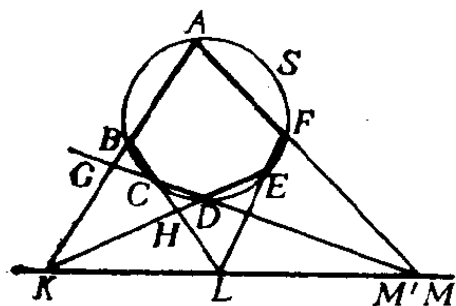



图 208

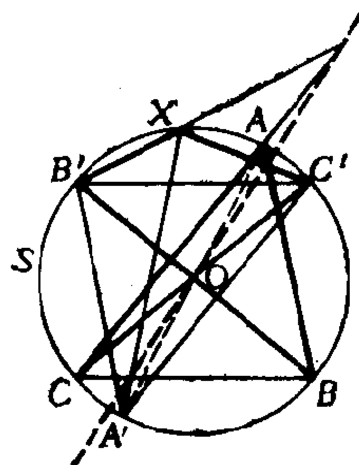



图 209

81．(a) 考虑六边形 $ABB'XC'C$（图209；注意这些顶点的次序！）。由巴斯卡定理，边 $AB$ 和 $XC'$，$AC$ 和 $XB'$，$BB'$ 和 $CC'$ 的交点共线（后一个交点以 $O$ 表示）。根据类似的理由可以证明，$AB$ 和 $XC'$，$BC$ 和 $XA'$ 的交点与点 $O$ 也共线。由此就能得到这个问题的结论。

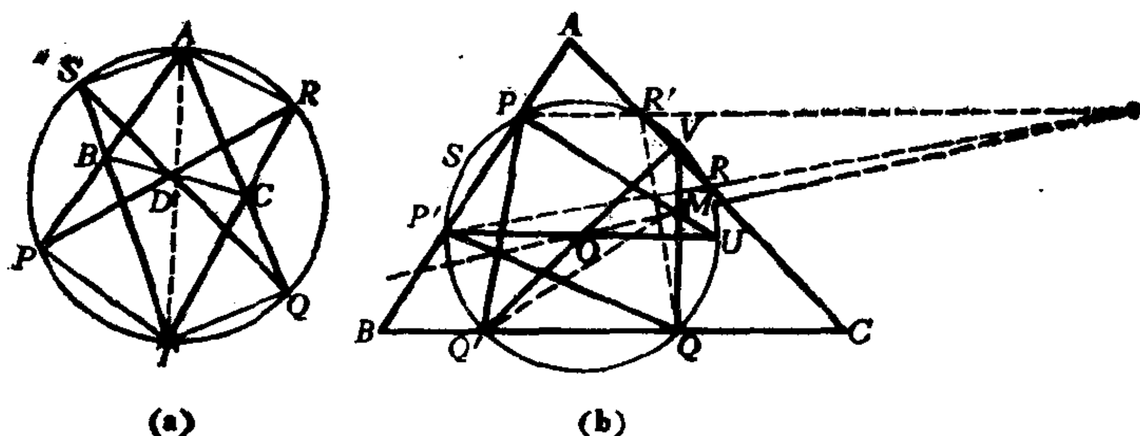



图 210

(b) 考虑以 $AT$ 为直径的圆的内接六边形 $APRTSQ$（注意这些顶点的次序！）[图210(a)]。由巴斯卡定理，边 $AP$ 和 $ST$，$AQ$ 和 $RT$，$RP$ 和 $QS$ 的交点共线，这就是我们所要证的。

(c) 设 $U$ 和 $V$ 分别是 $PM$ 和 $P'O$，$QM$ 和 $Q'O$ 的交点[图210(b)]。由于 $\angle P'PM=\angle Q'QM=90^\circ$，点 $U$ 和 $V$ 在 $S$ 上（它们是 $P'$ 和 $Q'$ 的对径点）。现在考虑 $S$ 的内接六边形 $P'QVQ'PU$（注意这些顶点的次序！）。由巴斯卡定理，这个六边形的边 $QV$ 和 $PU$，$Q'V$ 和 $P'U$，$P'Q$ 和 $Q'P$ 的交点，即点 $M$，$O$，$P'Q$ 与 $Q'P$ 的交点是共线的。类似地可以证明 $P'R$ 和 $PR'$，$Q'R$ 和 $QR'$ 的交点在直线 $MO$ 上。

82．(a) 考虑圆 $S$ 的下述射影变换：从 $A$ 点将 $S$ 上的点 $M$ 射影到直线 $CD$，在 $CD$ 上所得到的点 $N$ 沿直线 $CD$ 作平移得到点 $N'$，$NN'=a$（这是直线 $CD$ 的一个射影变换）．最后，从 $B$ 点将点 $N'$ 射影到 $S$ 上得点 $M'$（图211）．所要找的点是上述射影变换的不动点．为了确定它，我们必须找出 $S$ 上的任意三个点在这个射影变换下的象．这个问题可以有两个解，一个解或无解．

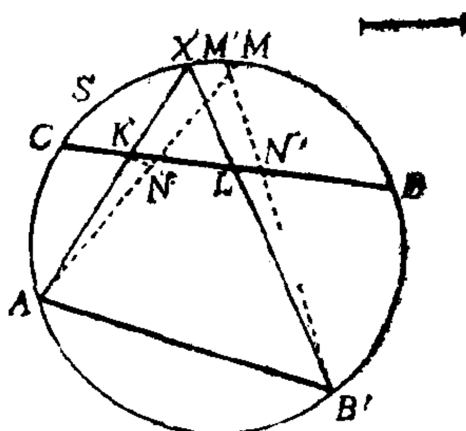
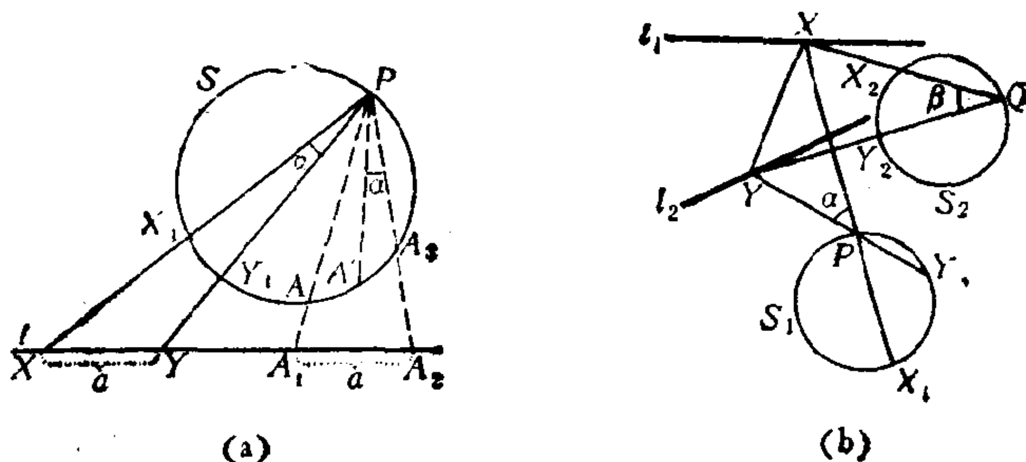



图 211

(b) 这个问题的解法和问题(a) 的解法只在一个地方不同，那就是需要用对给定点 $E$ 的中心对称（它也是 $CD$ 的射影变换）来代替沿直线 $CD$ 平移 $a$．




(a)　　(b)

图 212

83．(a) 设 $S$ 是经过 $P$ 点的圆，并设所要找的直线 $PX$ 和 $PY$ 与 $S$ 交于点 $X_1$ 和 $Y_1$[图212(a)]．考虑 $S$ 的下述射影

变换：从 $P$ 将 $S$ 射影到直线 $l$ 上，然后将 $l$ 沿它自己平移一段距离 $a$，再从 $P$ 点将 $l$ 回过来射影到 $S$ 上，最后，将 $S$ 绕它的中心旋转角度 $2\alpha$，旋转的方向要选得使 $PM$ 与 $l$ 的交点（$M$ 在 $S$ 上）产生沿与上述平移的方向相反的移动。显然，上述变换① 作用在点 $X_1$ 上的结果是 $X_1 \to X \to Y \to Y_1 \to X_1$（记住 $\widehat{X_1Y_1} = 2\angle X_1PY_1 = 2\alpha$），所以 $X_1$ 是一个不动点。在 $S$ 上选取三个点 $A, B, C$，并作出它们在上述变换下的象 $A'$，$B', C'$（参看图212(a)；$A_1$ 是 $PA$ 和 $l$ 的交点，$A_1A_2 = a$，$A_3$ 是 $PA_2$ 和 $S$ 的交点，$\widehat{A_3A'} = 2\alpha$；$B'$ 和 $C'$ 可以类似地作出来）。点 $X_1$ 是 $S$ 的将 $A, B, C$ 变成 $A', B', C'$ 的射影变换的不动点，因此可以作出来。

这个问题可以有两个解，一个解或无解。

(b) 经过点 $P$ 和 $Q$ 分别作圆 $S_1$ 和 $S_2$。设 $PX$ 和 $PY$ 与 $S_1$ 交于点 $X_1$ 和 $Y_1$，$QX$ 和 $QY$ 与 $S_2$ 交于点 $X_2$ 和 $Y_2$[图212(b)]。考虑 $S_1$ 的下述射影变换：从 $P$ 点将 $S$ 射影到 $l^1$ 上，然后从 $Q$ 点将 $l_1$ 射影到 $S_2$ 上，再将 $S_2$ 绕它的中心旋转一个角度 $2\beta$，接着从 $Q$ 将 $S_2$ 射影到 $l_2$ 上，随后又从 $P$ 点将 $l_2$ 射影到 $S_1$ 上，最后，将 $S_1$ 绕它的中心旋转一个角度 $2\alpha$。这个变换作用在点 $X_1$ 上的结果是 $X_1 \to X \to X_2 \to Y_2 \to Y \to Y_1 \to X_1$，所以 $X_1$ 是一个不动点。现在在 $S_1$ 上选取三个点 $A_1, B_1, C_1$，并作出它们在上述变换下的象 $A_1', B_1', C_1'$。于是，$X_1$ 作为 $S_1$ 的将 $A_1, B_1, C_1$ 变成 $A_1', B_1', C_1'$ 的射影变换的不动点可以确定出来。

由于 $S_1$ 可以朝两个方向旋转 $2\alpha$ 角，这个问题可以有多至四个解。

---

① 注意这个变换是一个射影变换；因为组成它的各个变换保持交比不变。

84．(a) 从点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 接连作给定的圆 $S$ 到它自身上的 $n$ 个射影（参看问题79的解答的开头一段），这时多角形 $A_1A_2\cdots A_n$（参看图99(a)）的顶点 $A_1$ 接连变成 $A_2,A_3,\cdots,A_n$，最后则变成 $A_1$，所以 $A_1$ 是这些射影的乘积的一个不动点。然后找出 $S$ 上的三个点 $A,B,C$ 在上述变换下的象 $A',B',C'$，作为 $S$ 的将 $A,B,C$ 变成 $A',B',C'$ 的射影变换的不动点，$A_1$ 可以作出来。这个 $n$ 角形的其它的顶点不难定出。我们的问题可以有两个解，一个解或无解。当上述 $n$ 个射影的乘积是恒同变换时，这个问题可以证明是不定的（与这种特殊情形有关的，可参看§3中问题41(a)和(b)，以及《几何变换》第一册中问题41(a)的解答）。有意思的是注意这个构图如同问题84(b)中的构图一样，可以只用直尺作出来。

假若点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 中有一些是无穷远点，即假如我们以给定所要找的 $n$ 角形的某些边的方向来代替这些边要经过的点，则 $S$ 到它自身上的相应的射影要用关于与给定的这些边的方向相垂直的直径的反射来代替（参看《几何变换》第一册中问题41(a)的解答，其中所有的点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 都是无穷远点）。

(b) 在关于给定圆 $S$ 的配极变换下，直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 变成点 $L_1,L_2,\cdots,L_n$。现在作 $S$ 的一个内接多边形 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_n$，它的边分别经过 $L_1,L_2,\cdots,L_n$（参看(a)）。从配极变换的性质A（参看第98页），可以推出以 $A'_1,A'_2,\cdots,A'_n$ 的极线 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为边的多边形满足本问题的要求。

85．(a) 以 $\alpha$ 表示圆 $S$ 的、有给定长度 $AB$ 的弦所张的中心角。其次，设 $l$ 是确定 $BC$ 边的方向的直线，并设 $M$ 是 $AC$ 上的一个点[图213(a)]. 考虑 $S$ 的下述射影变换：将 $S$ 绕

它的中心旋转 $\alpha$ 角，然后对与 $l$ 垂直的直径作反射，再从$M$将它射影到自身上（参看问题 79 的解答的开头一段）。显然，$A$ 是这个变换的不动点（我们有：$A\to B\to C\to A$）。这样，$A$ 作为一个已知的射影变换的不动点可以确定出来（参看问题82—84的解答）。这个问题可以有两个解，一个解或无解（不难证明，上述射影变换不能是恒同变换）。

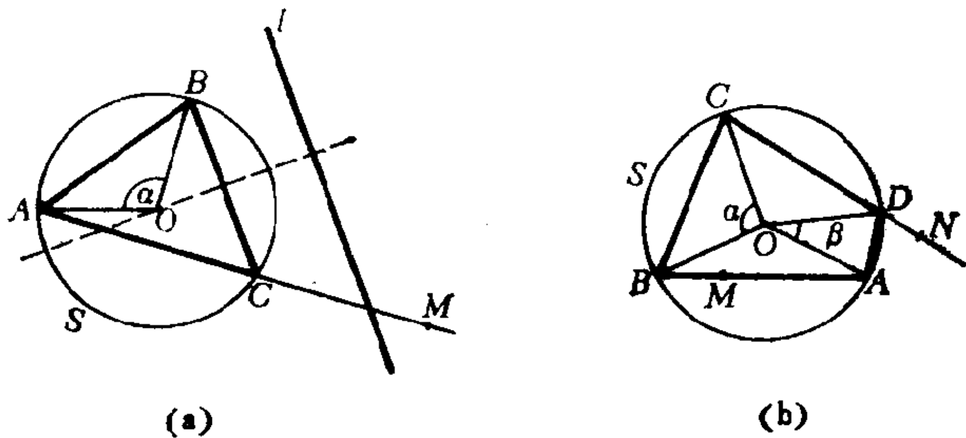



图 213

(b) 设$M$和$N$是所要找的四边形的边$AB$和$CD$上的给定点，$\alpha$和$\beta$是圆$S$中已知的弦$BC$和$AD$所对的圆心角[图213(b)]。考虑$S$的下述射影变换：从点$M$将$S$射影到它自身上，然后绕它的中心旋转$\alpha$角，再从点$N$将它射影到自身上，最后绕它的中心旋转$\beta$角。显然，$A$是这个变换的不动点（其实在这个变换下，$A\to B\to C\to D\to A$），这是作出$A$点的关键。这个问题可以有两个解，一个解或无

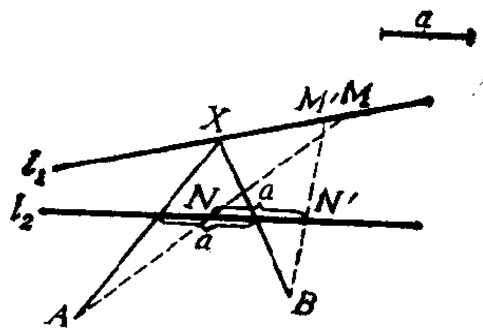
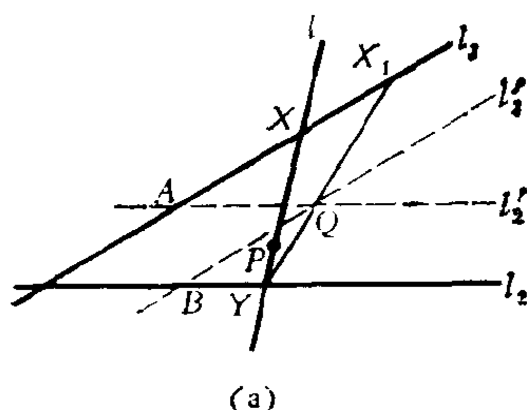



图 214

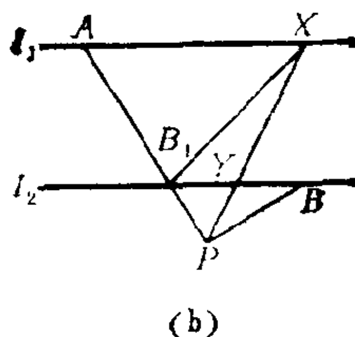
解，在特殊情况下可能是不定的。

86．(a) 考虑直线 $l_1$ 的下述射影变换：从 $A$ 点将 $l_1$ 上的点 $M$ 射影到直线 $l_2$，然后将 $l_2$ 上所得到的点 $N$ 沿 $l_2$ 平移一段距离 $NN'=a$，最后，从 $B$ 点将 $N'$ 射影到 $l_1$ 上的点 $M'$（图214）．所要找的点 $X$ 就是这个射影变换的一个不动点，从而可以确定出来（参看问题82(a)的解）。这个问题可以有两个解，一个解或无解。

(b) 这个问题的解法和(a)的解法只有一个地方不同，那就是要用绕 $l_2$ 上的点 $E$ 旋转 180° 来代替沿 $l_2$ 平移一段距离 $a$（参看问题82(b)的解答）．




(a)




(b)

图 215

87．(a) 设 $X$ 和 $Y$ 表示所找的直线同 $l_1$ 和 $l_2$ 的交点［图215(a)］。从 $P$ 点将 $l_1$ 射影到 $l_2$ 上，然后让 $l_2$ 和 $l_1$ 重合，特别，要使得 $B$ 和 $A$ 重合，最后，对 $l_2$ 作以 $A$ 为中心，以 $m/n$ 为系数的中心相似。这样所得到的 $l_1$ 的变换是一个射影变换，因为它是射影和中心相似变换的乘积。$X$ 是这个变换的不动点（实际上有 $X\to Y\to X$），从而可以确定出来（参看问题 82—85 的解答）．由于中心相似变换也可以有系数 $-m/n$，这个问题有多至四个解。在上述射影变换成为恒同变换的情形，这个问题是不确定的（如果在中心为 $P$，系数

为 $\pm m/n$ 的中心相似变换下，直线 $l_1$ 和 $l_2$ 对应，并且点 $A$ 和 $B$ 对应，就会出现这种情况)。

(b) 假定 $l_1 \not\parallel l_2$，从 $P$ 将 $l_1$ 射影到 $l_2$ 上，这时 $l_1$ 上所要找的点 $X_1$ 变成 $l_2$ 上的点 $Y$。其次，从分别经过 $B$ 和 $A$ 的直线 $l'_1$ ($\parallel l_1$) 和 $l'_2$ ($\parallel l_2$) 的交点 $Q$ [图215(a)]，回过来将 $l_2$ 射影到 $l_1$ 上。假设这个射影将 $l_2$ 上的点 $Y$ 变成 $l_1$ 上的点 $X_1$。从 $\triangle AQX_1 \backsim \triangle BYQ$ 可以得到 $AX_1/AQ = BQ/BY$，即

$$AX_1 \cdot BY = AQ \cdot BQ = p^2,$$

其中 $p$ 可以定出来。现在假若对 $l_1$ 作以 $A$ 为中心，以 $k^2/p^2$ 为系数的伸缩，则点 $X_1$ 变成点 $X'$，并且

$$AX' = \frac{k^2}{p^2} AX_1 = \frac{k^2}{p^2} \cdot \frac{p^2}{BY} = \frac{k^2}{BY} = AX,$$

即 $X'$ 和 $X$ 重合。这就证明了 $X_1$ 是 $l_1$ 的上述射影变换的不动点，因此它可以确定出来。由于上面的中心相似变换也可以有系数 $-k^2/p^2$，这个问题可以有多至四个解（上述射影变换不会是恒同变换）。

假若 $l_1 \parallel l_2$，并且 $B_1$ 是 $PA$ 同 $l_2$ 的交点，则

$$B_1Y = \frac{PB_1}{PA} \cdot AX.$$

因此条件 $AX \cdot BY = k^2$ 等价于条件

$$BY \cdot B_1Y = \frac{PB_1}{PA} \cdot k^2$$

[图 215(b)]. 由于除了线段 $BY$ 和 $B_1Y$ 的乘积 $BY \cdot B_1Y$ 以外，我们又已经给出这两个线段的和（或差），这些线段容易作出来。

**注** 我们可以不要求所找的直线经过给定的点 $P$，而代之以规定它要有预先指定的方向，这时只需在上面的解法中以平行射影来代替以 $P$ 为中心的中心射影。

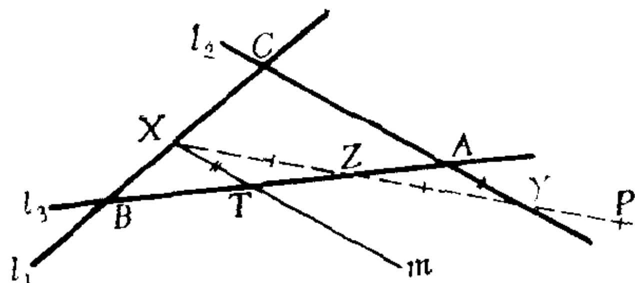



图 216

88．设 $l_1, l_2, l_3$ 两两相交于点 $A, B, C$，并设 $X, Y, Z$ 分别是所要找的直线 $l$ 同 $l_1, l_2, l_3$ 的交点。由假设，$XZ=ZY$（图216）。命 $T$ 是经过点 $X$ 与 $l_2$ 平行的直线 $m$ 同 $l_3$ 的交点；显然，$XT=AY$。从 $\triangle XTB \backsim \triangle CAB$ 可以推出 $XB/XT=CB/CA$。从而 $BX/YA=CB/CA$，并且右边是已知的。这就把我们的问题归结成作一条直线，它要经过 $P$ 点并与给定的直线 $l_1$ 和 $l_2$ 交于点 $X$ 和 $Y$，并且使得 $BX/YA$ 有给定的值，即归结成问题87(a)。在直线 $l_1, l_2, l_3$ 中可能有两条平行或三条都平行的情形，我们把它留给读者去考虑。

89．考虑直线 $l_1$ 的下述射影变换：从 $P$ 点将 $l_1$ 射影到 $l_2$ 上，然后将 $l_2$ 平行于它自己平移一段距离 $a_2$，再从 $P$ 点将 $l_2$ 射影到 $l_1$ 上，最后将 $l_1$ 平行于它自己平移一段距离 $a_1$。显然，所要找的点 $X_1$ 是这个变换的不动点（$X_1 \to X_2 \to Y_2 \to Y_1 \to X_1$，图217），从而能够作出来（参看前面几个问题的解答）．由于沿着一条直线的平移可以朝两个相反的方向，这个问题可以有

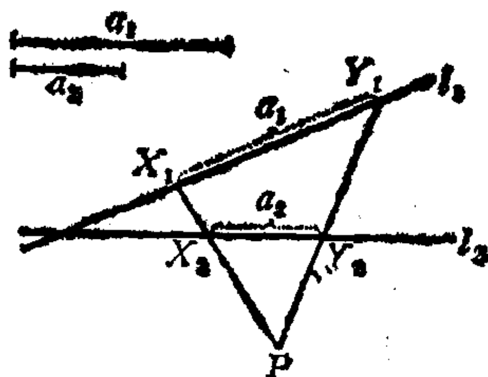



图 217

多至四个解．在上述变换成为恒同变换的例外情形，这个问题可以是不确定的（假若在以$P$为中心，以$\pm a_1/a_2$为系数的中心相似变换下，直线$l_1$和$l_2$相对应，就会发生这种情形）．

90．从$M_1$将$l_1$射影到$l_2$上，然后从$M_2$将$l_2$射影到$l_3$上，再从$M_3$将$l_3$射影到$l_4$上，等等，最后，从$M_n$将$l_n$射影到$l_1$上(参看图101)．所得到的$l_1$的这个射影变换的不动点就是我们要找的$n$角形的顶点（参看问题84(a)的解）．这个问题可以有两个解，一个解或无解．在$l_1$的这个射影变换成为恒同变换的情形，这个问题是不确定的．

假若对所要找的$n$角形的某条边我们不是给定它的一个点，而是给定它的方向，则相应的中心射影必须用平行射影来代替．

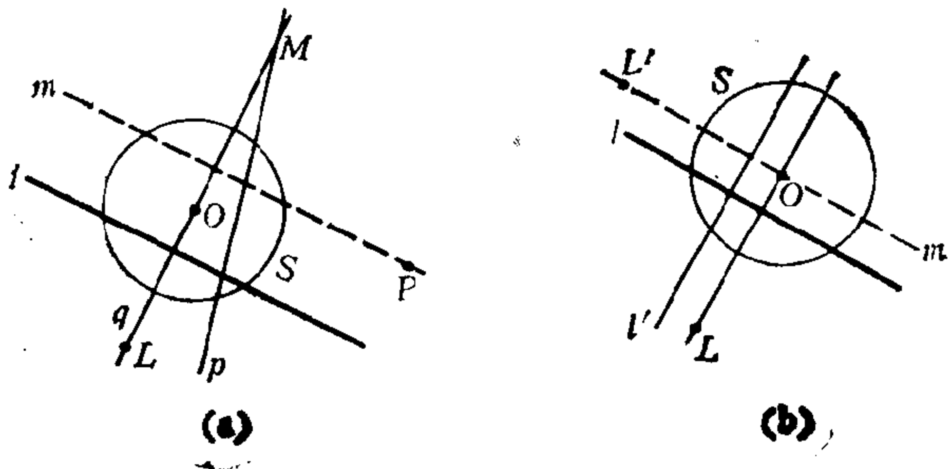



图 218

91．(a) 所要找的直线$m$(参看图218(a))的位置由$P$和$l$上的无穷远点确定．由此可以知道$m$关于给定的圆$S$的极点$M$是$P$的极线$p$与$l$上的无穷远点的极线$q$的交点．直线$p$单用直尺不难作出来(参看第86页)．直线$q$必定经过给定直线$l$的极点$L$(它可以单用直尺作出来)，并且还要经过无

穷远直线的极点，即经过$S$的中心$O$点。这表明$M$可以只用直尺作出来。只要$M$知道了，它关于$S$的极线$m$就可以只用直尺作出来。

显然，当$l$经过$O$点时作这个图是不可能的。但是那时$l$和$S$的交点确定一个已知其中点$O$的线段，并且经过$P$点与$l$平行的直线可以象§1中问题3(b)的解答那样作出来。在另一种情形，即当$P$点与$O$重合时，作这个图也是不可能的。在这种情形我们的解法如下：作给定的直线$l$关于$S$的极点$L$；直线$OL$与$l$垂直；其次作直线$l'$和$OL$平行，并作$l'$关于$S$的极点$L'$，则$OL'$就是所要的直线，因为它与$l'$垂直，所以与$l$平行[图218(b)]。

(b) 经过点$M$作一直线与$AB$平行，经过$B$点作直线与$AM$平行。设$N$是这两条直线的交点。显然，$MN$就是所要的线段。

(c) 设$L$是$l$关于$S$的极点，直线$OL$垂直于$l$。为找出所要的垂线，只需经过$P$点作一直线平行于$OL$。如果$l$经过$S$的中心$O$，作这个图是不可能的，然而这时我们可以作一条直线$l'$与$l$平行，并从$P$到$l'$作垂线。

92. 作一线段$BC$，它的长度等于给定的半径。经过$A$点作一直线与$BC$平行，并在它上面截取等于线段$BC$的线

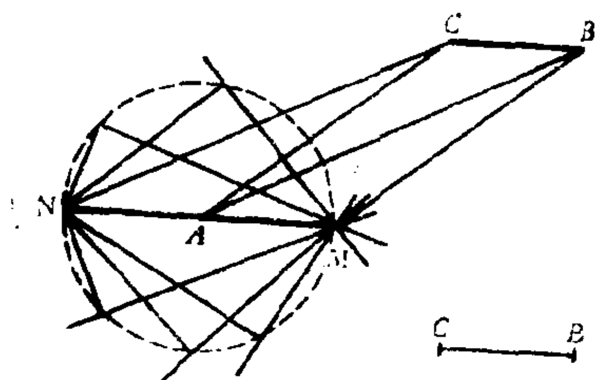


图 219

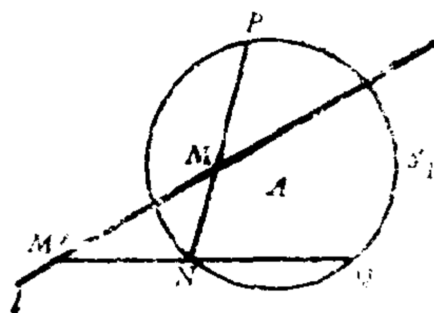


图 220

段 $MA$ 和 $AN$(参看问题91(b))。线段 $MN$ 就是所要的圆的直径。现在经过$M$点作一条直线，并从点$N$作这条直线的垂线(参看问题91(c))，它的垂足就是所要的圆上的一个点。通过变动经过$M$点的直线，我们可以得到所要的圆上的任意多个点(图219)。

93. 设$P$和$Q$是$S_1$上的两个点(图220)。从$P$点将$l$射影到$S_1$上，然后从$Q$回过来将$S_1$射影到$l$上。显然，在所得到的$l$的射影变换下①，$S_1$与$l$的交点是两个不动点。找出$l$上的三个点$R,S,T$的象的一种简便的方法，是先从$P$点将$S_1$上的三个点$\bar{R},\bar{S},\bar{T}$射影到$l$上，使得它们的象点是$R,S,T$，再从$Q$点将$\bar{R},\bar{S},\bar{T}$射影到$l$上得到$R',S',T'$(可以用问题92中的方法作出圆$S_1$上的五个点$P,Q,\bar{R},\bar{S},\bar{T}$)。如此，我们的问题就归结为用直尺确定$l$的一个射影变换的不动点问题，这个射影变换由$l$上给定的三个点$R,S,T$的象$R',S',T'$确定。在这个平面上给定了一个圆$S$，这个问题可以只用直尺解决(参看第120页)。

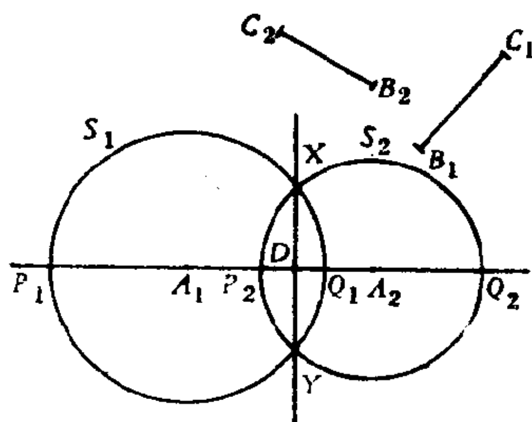



图 221

94. 我们先来找出连心线$A_1A_2$与$S_1$和$S_2$的交点$P_1$，$Q_1$和$P_2,Q_2$(图221；参看问题93)。显然，如果线段$P_1Q_1$和$P_2Q_2$中有一个在另一个之外或之内，则$S_1$和$S_2$不相交。剩下只要考虑$P_2$在线段$P_1Q_1$内且$Q_1$在线段$P_2Q_2$内的情

① 这个变换是射影变换，因为它保持交比不变(参看第115页)。

形。

下面来确定连心线 $A_1A_2$ 与 $S_1$ 和 $S_2$ 的公共弦 $XY$ 的交点 $D$（$X$ 和 $Y$ 是这两个圆的所要找的交点）。为此，考虑直线 $A_1A_2$ 的射影变换，它将任意一个点 $R$ 变成 $R'$，使得 $\angle RXR'=90°$。这个变换是射影变换，因为它可以用下列方法得到：从点 $X$ 将 $A_1A_2$ 射影到经过 $X$ 的任意一个圆 $S$ 上，然后将 $S$ 绕它的中心旋转180°，再从 $X$ 将 $S$ 射影到 $A_1A_2$ 上（参看问题83(a)的解答）。这个变换将 $P_1$ 变成 $Q_1$，$Q_1$ 变成 $P_1$，$P_2$ 变成 $Q_2$，所以我们知道了 $l$ 上三个点的象。只要用直尺可以很容易确定 $l$ 上一个预先指定的点 $M$ 在这个射影变换下的

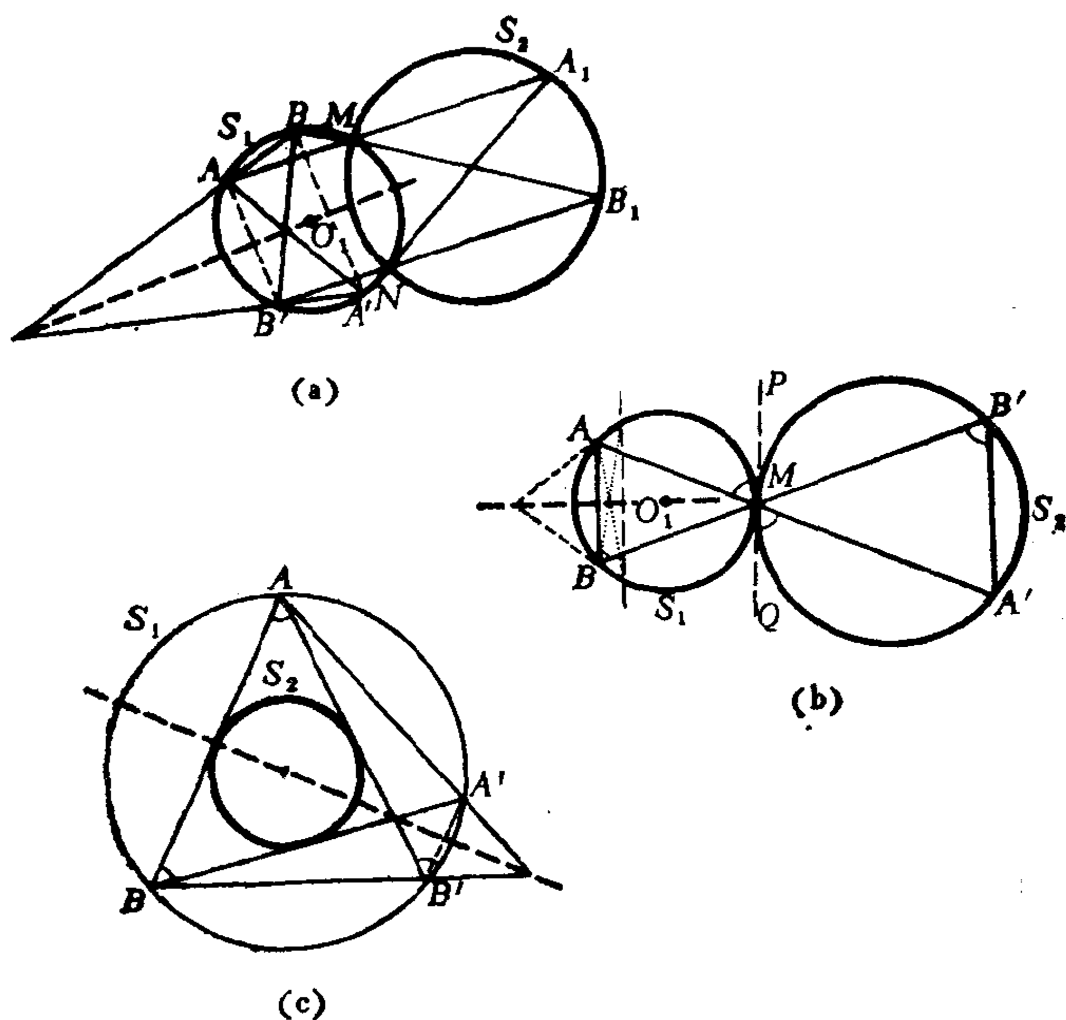



图 222

象；事实上，我们可以通过将 $l$ 射影到某一条其它的直线 $l_1$ 上，然后将 $l_1$ 射影到另一条直线 $l_2$ 上，再将 $l_2$ 回过来射影到 $l$ 上的办法来实现这个变换（参看图89）[①]。特别，点 $D$ 可以作为 $l$ 上无穷远点的象定出来(这需要作一条平行于 $l$ 的直线，而这个图可以只用直尺作出，参看问题91(a))。直线 $XY$ 是 $A_1A_2$ 在 $D$ 点的垂线，因此可以用问题91(a)中的解法作出来。这样，作为直线 $XY$ 同圆 $S_1$ 或 $S_2$ 的交点，所要找的点 $X$ 和 $Y$ 可以定出来(参看问题93)。

95．(a) 设 $M$ 和 $N$ 是圆 $S_1$ 和 $S_2$ 的交点[图222(a)]。从 $M$ 将 $S_1$ 的两个点 $A$ 和 $B$ 射影到 $S_2$ 上，再从 $N$ 将所得到的点 $A_1$ 和 $B_1$ 射影到 $S_1$ 上，得到 $S_1$ 上的点 $A'$ 和 $B'$。我们有 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$(因为 $\angle AMB=\angle A'NB'$；而这又是由于它们分别等于 $S_2$ 上 $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 所对的周围角 $\angle A_1MB_1$ 和 $\angle A_1NB_1$)。由此可以推出 $AB' \parallel A'B$，所以 $AB$ 和 $A'B'$ 的交点同 $AA'$ 和 $BB'$ 的交点的连线是 $S_1$ 的直径(根据对称性这是显然的；我们还可以证明这条直线是直线 $AB'$ 和 $BA'$ 在无穷远的交点的极线)。用同样的方法可以找出 $S_1$ 的另一条直径。于是，$S_1$ 的中心就是这两条直径的交点。

(b) 设 $M$ 是 $S_1$ 和 $S_2$ 的切点[图222(b)]。从 $M$ 将 $S_1$ 的两个点 $A$ 和 $B$ 射影到 $S_2$ 上，得到点 $A'$ 和 $B'$。弦 $AB$ 与 $A'B'$ 平行(如果 $PQ$ 是 $S_1$ 和 $S_2$ 的公切线，则 $\angle ABM=\angle AMP$，因为它们的量度都是 $\overset{\frown}{AM}$ 的一半；类似地，$\angle A'B'M=\angle A'MQ$，所以 $\angle ABM=\angle A'B'M$)。现在，

---

① 我们也可以从 $S$ 上的任意一个点 $O$ 将 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,M$ 射影到 $S$ 的点 $\overline{P}_1,\overline{Q}_1,\overline{P}_2,\overline{Q}_2,\overline{M}$；然后用图98所示的作图方法，找出 $\overline{M}$ 在 $S$ 的一个射影变换下的象 $\overline{M}'$，这个射影变换将 $\overline{P}_1,\overline{Q}_1,\overline{P}_2$ 变成 $\overline{Q}_1,\overline{P}_1,\overline{Q}_2$，最后，从 $O$ 点将 $\overline{M}'$ 回过来射影到 $l$ 上。

可以只用直尺作出 $S_1$ 的与 $AB$ 平行的一条弦(参看§1的问题3(b))，所以可以找出 $S_1$ 的一条直径(参看(a)的解答)。类似的作图方法可以给出另一条直径。这两条直径的交点就是所要的 $S_1$ 的中心。

(c) 从较大的圆 $S_1$ 的一个点 $A$ 到另一个圆 $S_2$ 作切线 $AB$ 和 $AB'$(参看§4的问题54)，并从前一条切线同 $S_1$ 的交点 $B$ 作 $S_2$ 的另一条切线 $BA'$[图 222(c)]。显然 $\angle BAB' = \angle ABA'$(由于对称性)，$\angle ABA' = \angle A'B'A$(由于它们对着同一个弧). 由此推出 $\angle BAB' = \angle A'B'A$，所以 $AB \parallel A'B'$. 从而 $AA'$ 和 $BB'$ 的交点同 $AB'$ 和 $BA'$ 的交点在 $S_1$ 的一条直径上(参看(a)的解)。可以类似地找出 $S_1$ 的另一条直径，从而确定它的中心。

## 附　录

**96.** 设 $PAQ$ 和 $RAS$ 是两个双曲对顶角，并设 $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S}$ 是一个四边形，它的边是圆 $\Sigma$ 在 $P,Q,R,S$ 的切线(图223)。直线 $\bar{P}A$ 和 $\bar{R}A$(更准确些说，是这些直线包含在圆盘 $\boldsymbol{K}$ 内部的线段)是角 $PAQ$ 和 $RAS$ 的平分线。由于这两个角的平分线构成一条直线，$\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S}$ 的对角线 $\bar{P}\bar{R}$ 经过 $PQRS$ 的对角线的交点。这刚好是§3问题40(a)中的定理的结论。对顶角的平分线构成一条直线这一事实，在欧几里得几何和双曲几何中都容易证明(通过等式

$$\delta_{\bar{P}AP} + \delta_{PAS} + \delta_{SA\bar{R}} = \delta_{\bar{R}AR} + \delta_{RAQ} + \delta_{QA\bar{P}}$$

可以推出来)。

用这个方法我们可以得到问题40(a)的一个新的简单的解法。

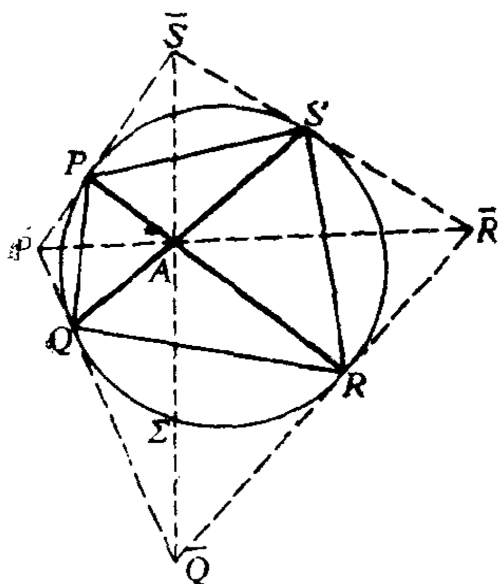



图 223

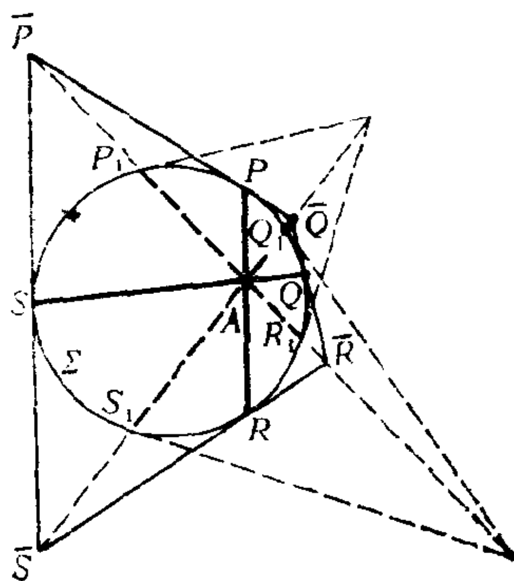



图 224

97. 设 $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}\bar{S}$ 是圆 Σ的一个外切四边形；$P,Q,R,S$ 是它同 Σ的切点，并设 $P_1R_1$ 和 $Q_1S_1$ 是在对角线 $\bar{P}\bar{R}$ 和 $\bar{Q}\bar{S}$ 上由 Σ所确定的弦（它们是双曲角 $PAQ$ 和 $QAR$ 的平分线，其中 $A$ 是 $PR$ 和 $QS$ 的交点；参看上一个问题）。则 Σ在 $P_1$ 和 $R_1$ 的切线相交在直线 $\bar{Q}\bar{S}$ 上，在 $Q_1$ 和 $S_1$ 的切线相交在 $\bar{P}\bar{R}$ 上（图224）。

98. 设 $ABC$ 是由双曲直线 $PQ,RS$ 和 $TU$ 确定的三角

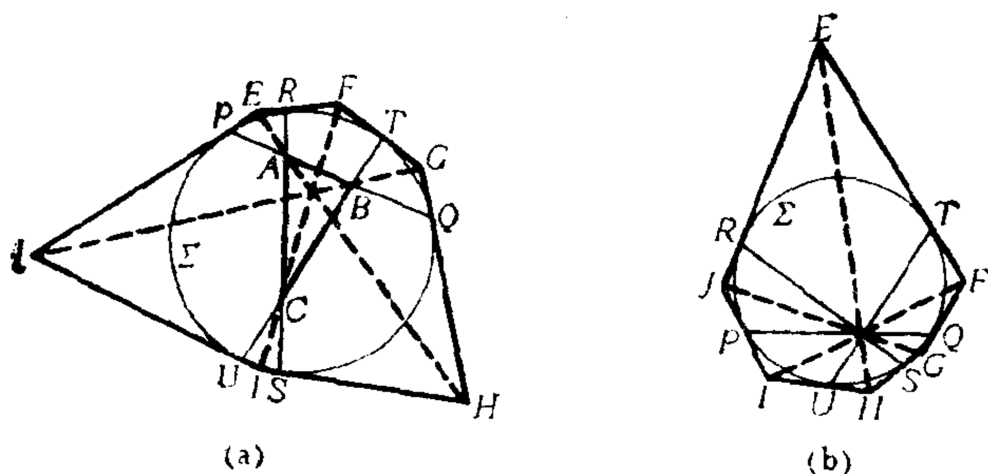



图 225

形，$EFGHIJ$ 是 $\Sigma$的外切六边形，它的边与 $\Sigma$切于点 $P,R,T,Q,S,U$（图225）。则$\triangle ABC$ 的角平分线是直线 $EH,FI,GJ$（参看问题96）。说$\triangle ABC$ 的角平分线共点，指的就是直线 $EH$、$FI$、$GJ$ 共点；而这恰好是勃良松定理的结论。

**注** 我们的解答只是证明从勃良松定理可以推出非欧几里得的三角形的角平分线共点。反过来的论断——从非欧几里得的三角形的角平分线共点推出勃良松定理——严格地说是不对的。问题在于图225(a)中的直线 $PQ,RS,TU$ 可能共点[图 225(b)]。在这种(明显例外的)情形我们没有$\triangle ABC$，而且勃良松定理并非是关于三角形的角平分线共点的定理的推论，而是关于对顶角的平分线的更为简单的定理的推论(参看图225(b)和图223)。

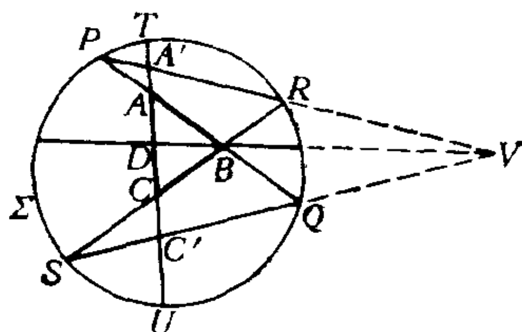


图 226

99. 设 $PQ,RS,TU$ 是确定$\triangle ABC$ 的非欧几里得的直线，$V$是 $PR$ 和 $SQ$ 的交点，并设 $A',C',D$ 是直线 $VP,VS,VB$ 与 $TU$ 的交点(图226)。则

$$d_{AB}=\log\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right),\quad d_{BC}=\log\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right),$$

$$d_{AC}=\log\left(\frac{AU/CU}{AT/CT}\right).$$

我们需要证明

$$\log\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)+\log\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)>\log\left(\frac{AU/CU}{AT/CT}\right),$$

即

$$\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)>\left(\frac{AU/CU}{AT/CT}\right).$$

当以$V$为中心将$PQ$射影到$UT$时，点$A,B$；$Q,P$变成点$A,D$；$C',A'$，所以有$(AQ/BQ)/(AP/BP)=(AC'/DC')/(AA'/DA')$。同样，当从$V$将$RS$射影到$UT$时，点$B,C$；$S,R$变成点$D,C$；$C',A'$，所以又有$(BS/CS)/(BR/CR)=(DC'/CC')/(DA'/CA')$。由此可得

$$\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)=\left(\frac{AC'/DC'}{AA'/DA'}\right)\left(\frac{DC'/CC'}{DA'/CA'}\right)$$

$$=\frac{AC'/CC'}{AA'/CA'}.$$

由于$\frac{AC'}{CC'}>\frac{AU}{CU}$（因为

$$\frac{AC'}{CC'}-\frac{AU}{CU}=\frac{AC'\cdot CU-CC'\cdot AU}{CC'\cdot CU}$$

$$=\frac{AC'(CC'+C'U)-CC'(AC'+CU')}{CC'\cdot CU}$$

$$=\frac{C'U(AC'-CC')}{CC'\cdot CU}=\frac{C'U\cdot AC}{CC'\cdot CU}>0),$$

和$\frac{AA'}{CA'}<\frac{AT}{CT}$（因为

$$\frac{AA'}{CA'}-\frac{AT}{CT}=\frac{AA'\cdot CT-CA'\cdot AT}{CA'\cdot CT}$$

$$=\frac{AA'(CA'+A'T)-CA'(AA'+A'T)}{CA'\cdot CT}$$

$$=\frac{A'T(AA'-CA')}{CA'\cdot CT}=-\frac{A'T\cdot CA}{CA'\cdot CT}<0\Big),$$

可以得出

$$\left(\frac{AQ/BQ}{AP/BP}\right)\left(\frac{BS/CS}{BR/CR}\right)=\frac{AC'/CC'}{AA'/CA'}>\frac{AU/CU}{AT/CT}.$$

这就是我们所要证明的。

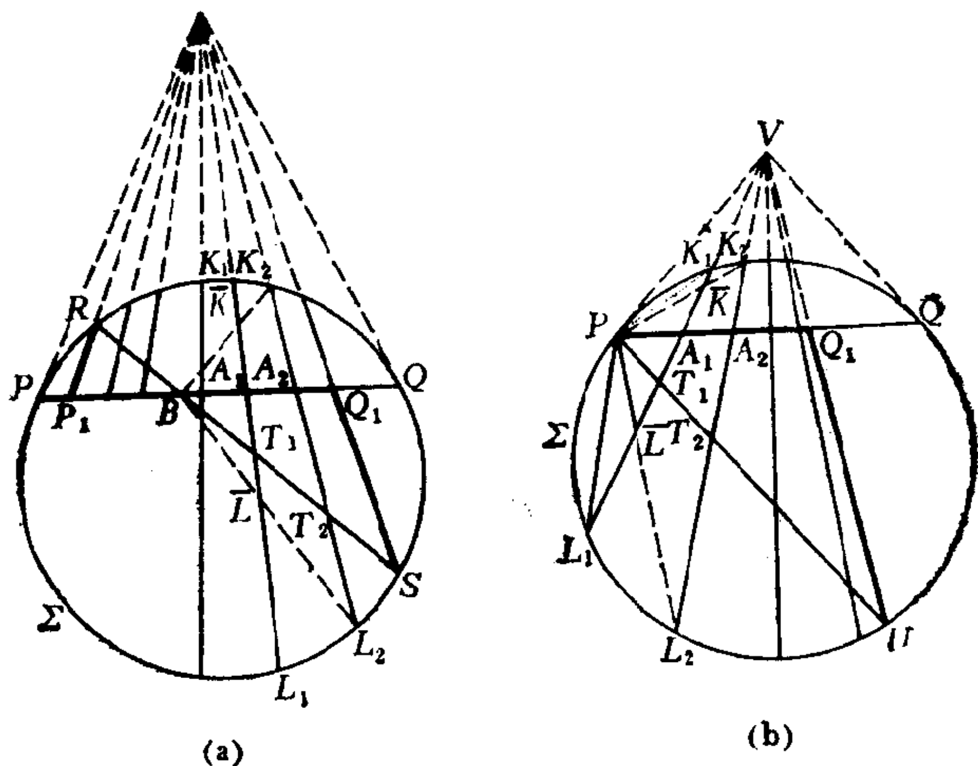



图 227

**100.** (a)这个问题的第二个结论可以直接从图227(a)推出来。剩下的是要证明：从 $RS$ 上的点到直线 $PQ$ 的距离，当这些点从 $B$ 点往远处移动时是无限递增的，参照图227(a)。我们先来证明

$$d_{A_1T_1}<d_{A_2T_2}\quad 或\quad \frac{A_1L_1/T_1L_1}{A_1K_1/T_1K_1}<\frac{A_2L_2/T_2L_2}{A_2K_2/T_2K_2}.$$

现在

$$\frac{A_2L_2/T_2L_2}{A_2K_2/T_2K_2}=\frac{A_1\bar{L}_1/T_1\bar{L}}{A_1\bar{K}/T_1\bar{K}}$$

(由于通过以$B$为中心的射影,点$A_2, T_2$; $K_2, L_2$变成点$A_1$, $T_1$; $\bar{K}, \bar{L}$), 并且

$$\frac{A_1L_1}{T_1L_1}<\frac{A_1\bar{L}}{T_1\bar{L}}, \qquad \frac{A_1K_1}{T_1K_1}>\frac{A_1\bar{K}}{T_1\bar{K}}$$

(参看上一个问题的解答)。因此

$$\frac{A_1L_1/T_1L_1}{A_1K_1/T_1K_1}<\frac{A_1\bar{L}/T_1\bar{L}}{A_1\bar{K}/T_1\bar{K}}=\frac{A_2L_2/T_2L_2}{A_2K_2/T_2K_2}.$$

这就是我们所要证明的。因为射线$P_1R$和$Q_1S$是无限的,从直线$RS$上的点到直线$PQ$的距离无限递增;参看第135页。

(b) 这个问题的第二个结论可以从图227(b)直接推出来。现在来证明从$UP$上的点到直线$QP$的距离,当这个点朝着从$P$到$U$的方向趋近于$U$时是无限递增的。按照图227(b)中的记号,我们需要证明

$$d_{T_1A_1}<d_{T_2A_2} \quad \text{或} \quad \frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}.$$

现在

$$\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}=\frac{T_1\bar{K}/A_1\bar{K}}{T_1\bar{L}/A_1\bar{L}}$$

(从$P$点的射影将点$T_2, A_2$; $K_2, L_2$变成$T_1, A_1$; $\bar{K}, \bar{L}$), 并且

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1}<\frac{T_1\bar{K}}{A_1\bar{K}}, \qquad \frac{T_1L_1}{A_1L_1}>\frac{T_1\bar{L}}{A_1\bar{L}}$$

(参看问题99的解答)。因此

$$\frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_1K/A_1K}{T_1L/A_1L}=\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}.$$

这就是我们所要证的。

因为射线 $Q_1U$ 是无限的,所以从直线$PU$上的点到 $PQ$ 的距离,当这个点从 $P$ 到$U$的方向趋向于$U$时是无限递增的(参看第135页)。另一方面,从 $PU$ 上的点到直线 $PQ$ 的 距 离在从$U$到$P$的方向无限递减,这是因为当点 $A_1$ 趋向$P$时比 值 $A_1K_1/T_1K_1$趋向于1.(为说明这一点,只要注意

$$\frac{A_1K_1}{T_1K_1}=\frac{S_{PA_1K_1}}{S_{PT_1K_1}}=\frac{\frac{1}{2}PA_1\cdot PK_1\cdot\sin\angle A_1PK_1}{\frac{1}{2}PT_1\cdot PK_1\cdot\sin\angle T_1PK_1}$$

$$=\frac{PA_1}{PT_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle T_1PK_1}=\frac{\sin\angle PT_1A_1}{\sin\angle PA_1T_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle T_1PK_1}$$

$$=\frac{\sin\angle PT_1A_1}{\sin\angle T_1PK_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle PA_1T_1}.$$

如果 $A_1\to P$, 则

$$\angle PT_1A_1=\angle UT_1L_1\to 180°-\angle UPV,$$

$$\angle T_1PK_1\to\angle UPV,$$

$$\frac{\sin\angle PT_1A_1}{\sin\angle T_1PK_1}\to 1,\qquad \angle A_1PK_1\to\angle QPV,$$

$$\angle PA_1T_1=\angle QA_1K_1\to\angle QPV,$$

$$\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle PA_1T_1}\to 1.)$$

比 $A_1L_1/T_1L_1$ 也趋向于1(其证明和刚才给出的类似)。因此

$$\frac{A_1K_1/T_1K_1}{A_1L_1/T_1L_1}\to 1, \quad 即 \quad d_{A_1T_1}=\log\left(\frac{A_1K_1/T_1K_1}{A_1L_1/T_1L_1}\right)\to 0.$$

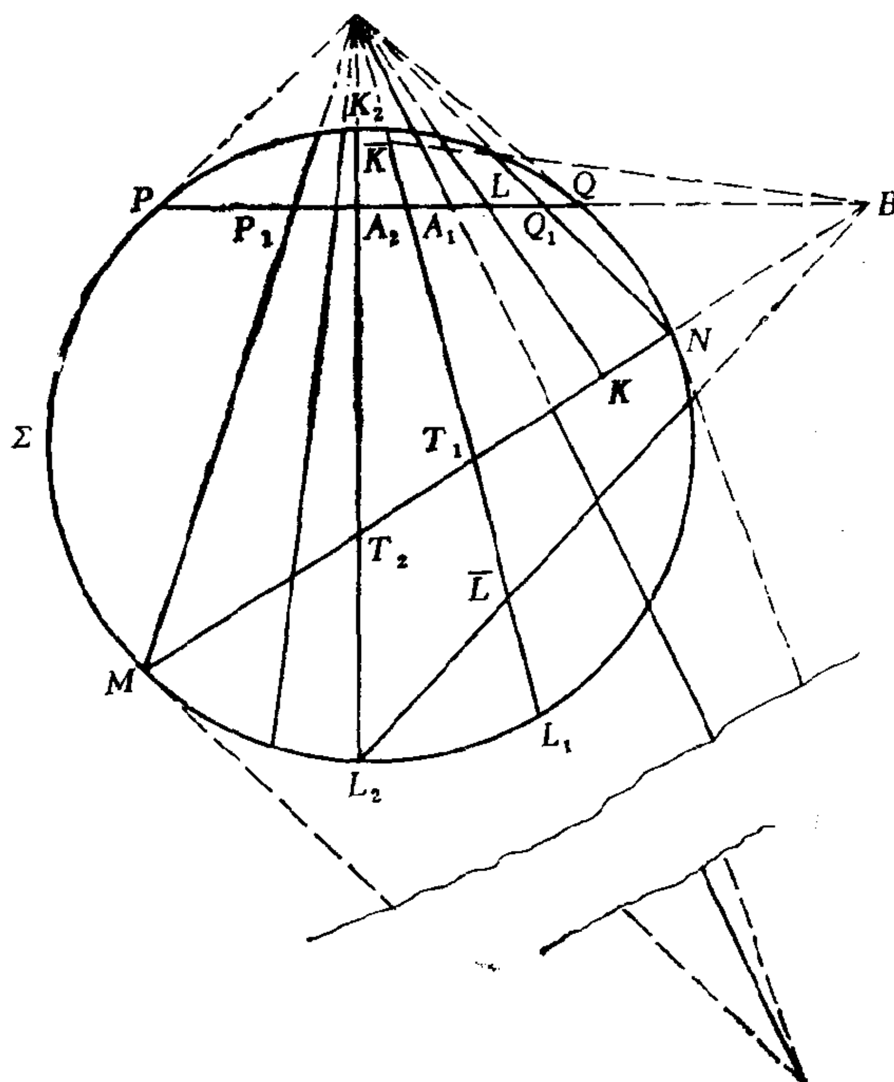



图 227(c)

(c) 双曲平面上两条直线 $PQ$ 和 $MN$ 的公垂线是圆 $\Sigma$ 在 $P$ 和 $Q$，$M$ 和 $N$ 的切线的交点的连线[图 227(c)]，即直线 $PQ$ 和 $MN$ 关于 $\Sigma$ 的极点的连线（参看§4的开头部分）。这条直线也就是 $PQ$ 和 $MN$ 的交点 $B$ 关于 $\Sigma$ 的极线（参看§4的定理 2）；它当且仅当 $B$ 在 $\Sigma$ 的外部时才与 $\Sigma$ 相交。这就

推出问题中的第一个结论。最后一个结论可以从图227(c)直接推出来。剩下来的是要证明：从 $MN$ 上的点到直线 $PQ$ 的距离，当这些点从 $MN$ 和 $PQ$ 的公垂线的垂足往两端移动时无限递增。按照图227(c)中的记号，我们首先要证明

$$d_{T_1A_1}<d_{T_2A_2} \quad 或 \quad \frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}.$$

现在

$$\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}=\frac{T_1\overline{K}/A_1\overline{K}}{T_1\overline{L}/A_1\overline{L}}$$

（利用从 $B$ 点的射影，点 $A_2,T_2$； $K_2,L_2$ 变成 $A_1,T_1$； $\overline{K},\overline{L}$），并且

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1}<\frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}}, \qquad \frac{T_1L_1}{A_1L_1}>\frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}}$$

（参看问题99的解答）。因此

$$\frac{T_1K_1/A_1K_1}{T_1L_1/A_1L_1}<\frac{T_1\overline{K}/A_1\overline{K}}{T_1\overline{L}/A_1\overline{L}}=\frac{T_2K_2/A_2K_2}{T_2L_2/A_2L_2}.$$

这就是我们所要证的不等式。

因为射线 $P_1M$ 和 $Q_1N$ 是无限的（参看第135页），所以

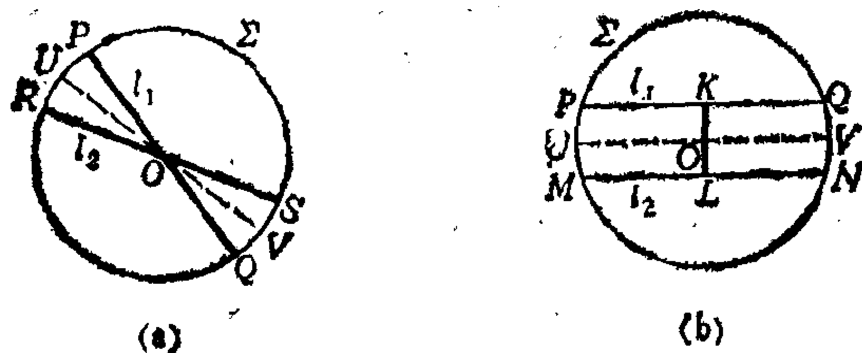



图 228

直线 $MN$ 上的点到直线 $PQ$ 的距离，当这些点从公垂线的垂足向两端移动时是无限递增的。

101.(a) 首先设 $l_1$ 和 $l_2$ 是双曲平面上的两条相交直线。用双曲运动把它们的交点移到圆盘**K**的中心 $O$ 点[图228(a)]。容易看到，这两条直线的夹角 $POR$ 的（既是欧几里得的，又是双曲的）平分线 $UV$ 是它们的双曲对称轴。事实上，对于直线 $UV$ 的（欧几里得的）反射把 $PQ$ 变成 $RS$；但是这也是对于直线 $UV$ 的双曲反射，因为圆盘**K**的直径 $UV$ 的欧几里得的垂线也是 $UV$ 的双曲的垂线。

现在考虑两条超平行直线 $l_1$ 和 $l_2$，用双曲运动将它们的公垂线 $KL$（参看问题100(c)）的中点移到圆盘 **K** 的中心 $O$ 点[图228(b)]。这时 $l_1$ 和 $l_2$ 在欧几里得意义下与 $KL$ 垂直，并且在欧几里得意义下线段 $OK$ 和 $OL$ 全等（参看第137页）。直线 $KL$ 在 $O$ 点的（欧几里得的和双曲的）垂线 $UV$ 是 $l_1$ 和 $_2$ 的（欧几里得的和双曲的）对称轴。

要证明平行线 $PQ$ 和 $PT$ 的对称轴存在就稍为困难一点。这时作直线 $TQ$ 与 $PT$ 和 $PQ$ 平行，然后作直线 $PU$ 与 $PQ$ 和 $PT$ 平行并与 $QT$ 垂直[图229(a)]。直线 $PU$ 就是 $PQ$ 和 $PT$ 的所要的对称轴；为要证明这一点，只需用适当的双曲运动将 $PU$ 变成**K**的直径[图229(b)]。

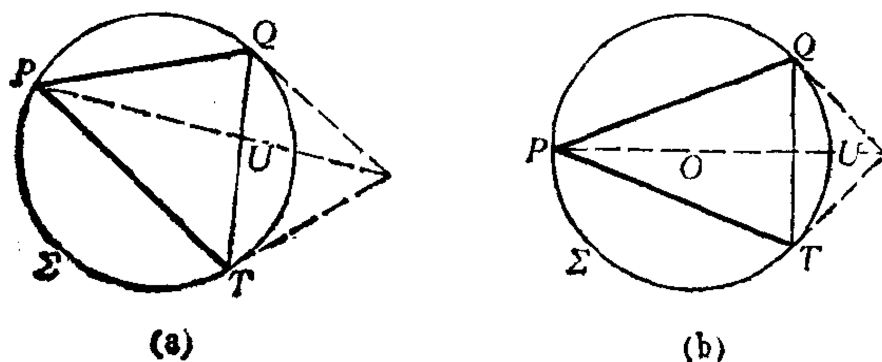



图 229

(b) 对于 $l$ 的反射将 $l_1$ 变成经过 $A_2$ 的直线 $l_1'$（因为 $l_1$ 经过 $A_1$），并且 $l_1'$ 与 $l_1$ 和 $l$ 属于同一个束。由于这种直线显然是唯一的，所以 $l_1'$ 和 $l_2$ 重合。

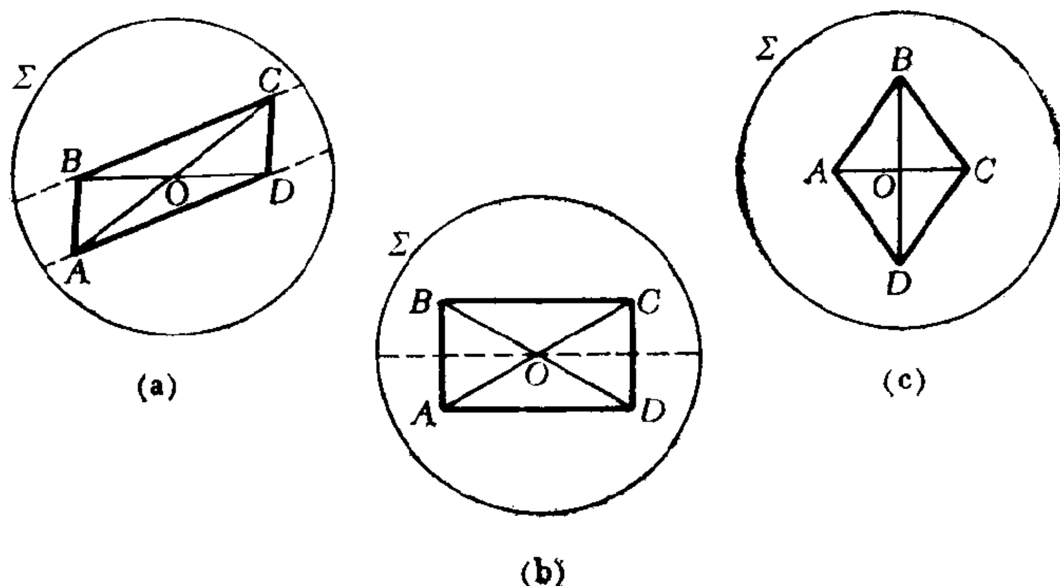



图 230

102. 设 $ABCD$ 是一个双曲平行四边形。用双曲运动将它的对角线的交点移到圆盘$K$的中心 $O$ 点。由于线段 $OA$，$OC$（和线段 $OB,OD$）的双曲长度相等，它们的欧几里得长度也相等（参看第137页）.由此可知四边形 $ABCD$ 是一个欧几里得的平行四边形[图230(a)]。

(a) $d_{AB}=d_{CD}$，因为通过一个双曲运动，即对 $K$的中心 $O$ 点的中心对称，线段 $AB$ 变成 $CD$。同样可以证明 $d_{AD}=d_{BC}$。

(b) $\delta_A=\delta_C$，因为在对 $O$ 点的中心对称（这是个双曲运动）下，角$A$变成角$C$。用同样的方法可以证明 $\delta_B=\delta_D$。

(c) 假若对角线 $AC$ 和 $BD$ 在双曲意义下互相垂直，则在欧几里得意义下它们也互相垂直。由此可以推出 $ABCD$

是一个欧几里得的菱形[图230(b)]。在那种情形下 $d_{AB}=d_{AD}$，因为经过对直线 $AC$ 的反射（这是一个双曲运动）$AB$ 变成 $AD$；并且在这个反射下角 $BAC$ 变成角 $DAC$，所以 $\delta_{BAC}=\delta_{DAC}$。

(d) 假若 $d_{OA}=d_{OB}$，则线段 $OA$ 和 $OB$ 在欧几里得意义下全等（参看第137页），所以 $ABCD$ 是一个欧几里得的矩形[图230(c)]。在那种情形下 $\delta_A=\delta_B$，因为对 $K$ 的垂直于（在欧几里得的和双曲的意义下）$AB$ 和 $DC$ 的直径的反射（这是一个非欧几里得的运动），角 $A$ 变成角 $B$。

(e) 参看(c)和(d)。

**注** 作为不用平行公理的欧几里得几何中的问题，我们建议读者证明问题(a)—(e)中的定理；这也就自动地证明了这些定理在双曲几何中成立。

**103.** 不是。它们是超平行的（参看图230(a)）。

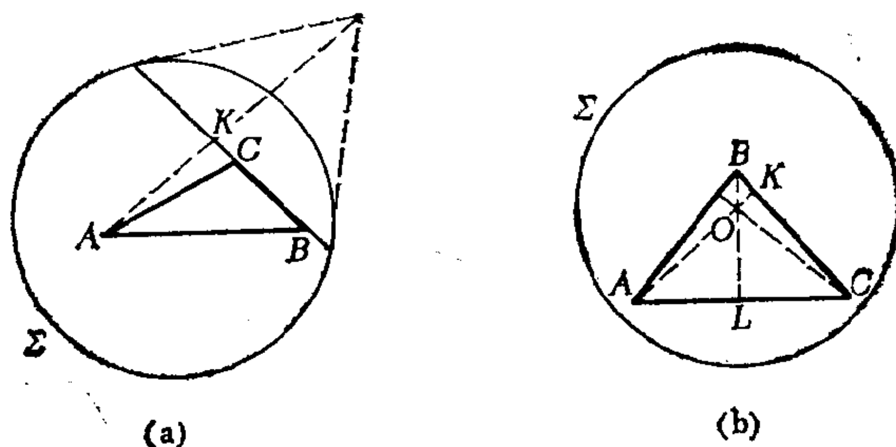



图 231

**104.** 设 $H$ 是锐角三角形 $ABC$ 的高线 $AK$ 和 $BL$ 的交点（这些高线相交，因为它们都经过 $\triangle ABC$ 的内部；事实上，假若经过 $A$ 点的高线与 $BC$ 边在 $C$ 外面的延长线相交，则根据在双曲几何中关于三角形的一个外角的仍然成立的定理，$C$

角将是钝角[看图 231(a)])．用双曲运动将点$H$移到$K$的中心$O$[图 231(b)]。在通常的（即欧几里得的）垂直意义下我们有$AK\perp BC$，$BL\perp AC$。由此可以推出$O$是$\triangle ABC$的欧几里得的高线的交点，所以$CO\perp AB$。从$AB$在欧几里得意义下垂直于$K$的直径$CO$这一事实，可知$CO$是$\triangle ABC$的双曲的高线。所以锐角三角形$ABC$的三条（双曲）高线交于一点。

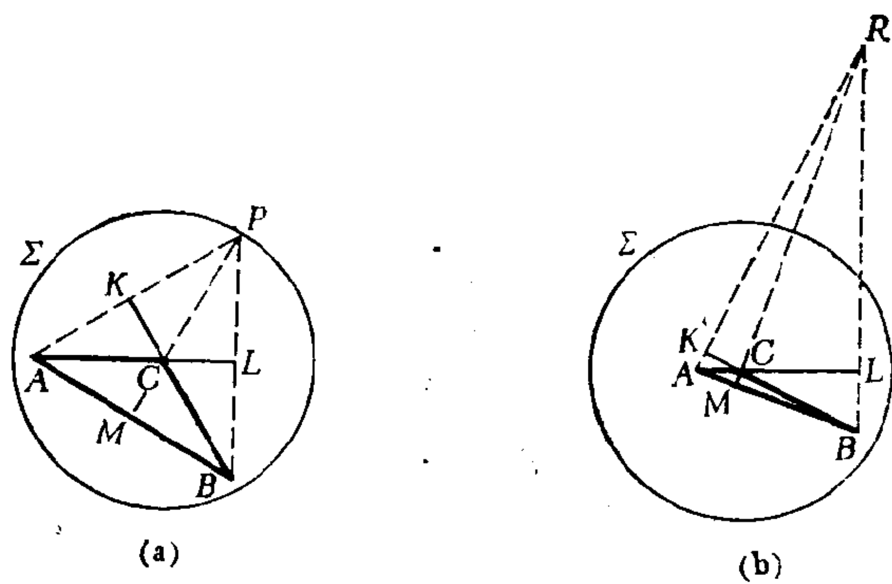


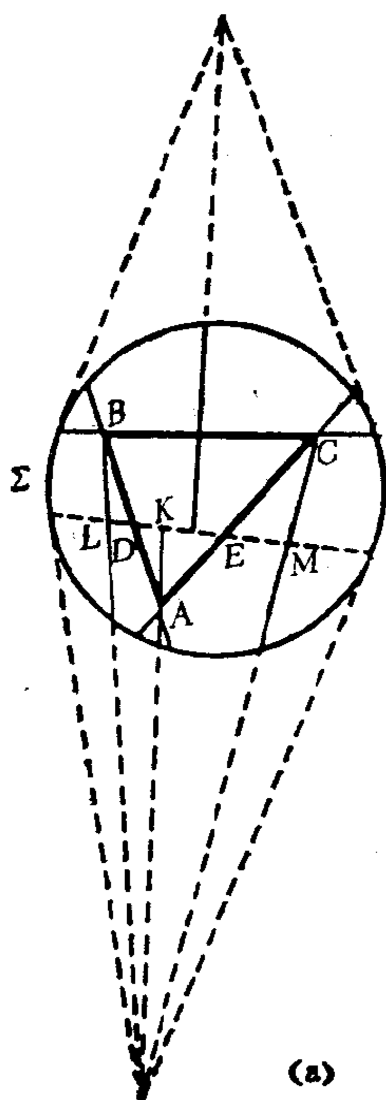

图 232

在钝角三角形的情形问题就不同了。假若钝角三角形$ABC$的两条高线$AK$和$BL$交于一点$H$，则第三条高线也经过$H$；这可如上证明。假若钝角三角形$ABC$（$C$角是钝角）的高线$AK$和$BL$平行，用双曲运动将顶点$C$移到$K$的中心[图 232(a)]。则在欧几里得意义下$AK\perp BC$，$BL\perp AC$。由此可知$AK$和$BL$的交点$P$在$\Sigma$上，并是$\triangle ABC$的欧几里得的高线的交点，而且在欧几里得意义下$CP\perp AB$；从而$CP$也是$\triangle ABC$的双曲的高线．总之，假若钝角三角形$ABC$的两条高线$AK$和$BL$平行，则所有三条高线$AK$，$BL$，$CM$都平行（请读

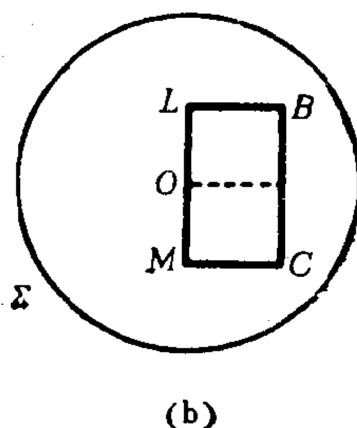
者自己陈述与之相对应的、关于$K$的弦的欧儿里得的定理)。

最后，假设$\triangle ABC$的高线$AK$和$BL$是超平行的。用双曲运动将$C$移到$K$的中心[图 232(b)]。则在欧儿里得意义下$AK \perp BC$，$BL \perp AC$。直线$AK$和$BL$的交点$R$(在$K$的外部!)是$\triangle ABC$的欧儿里得的高线的交点，所以在欧儿里得的意义下$CR \perp AB$。由此推出$CR$也是$\triangle ABC$的双曲高线。总之，假若钝角三角形$ABC$的高线$AK$和$BL$是超平行的，则所有三条高线$AK, BL, CM$都是超平行的（参看第152，153页）。

105. 首先证明：双曲三角形$ABC$的边$AB$和$AC$的中点




(a)




(b)

图 233

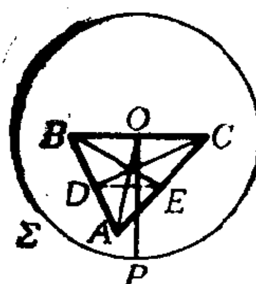



图 234

的连线$DE$与边$BC$的垂直平分线正交。从$\triangle ABC$的顶点作中位线$DE$的垂线$AK, BL, CM$[图233(a)]。根据关于直角三角形全等的判别法（在双曲几何中仍然成立；参看第145页），可以知道$\triangle ADE$和$\triangle BDL$全等，$\triangle AEK$和$\triangle CEM$全等，所以$d_{BL}=d_{AK}=d_{MC}$。用双曲运动将线段$LM$的中点移到圆盘$K$的中心$O$点[图233(b)]。则$OL=OM$，$BL\perp LM$，$CM\perp LM$（在欧几里得意义下）。现在，从$d_{LB}=d_{MC}$可以推出线段$LB$和$MC$在欧几里得意义下是全等的（否则，对于$K$的与$LM$垂直的直径的反射(这是一个双曲运动)，将把其中的一个线段变成另一个的一部分)，所以四边形$LMCB$是一个欧几里得的矩形。直线$LM$在$O$点的欧几里得的垂线也是它在双曲意义下的垂线。同时，它是$BC$在欧几里得和双曲意义下的垂直平分线。这就推出我们的结论。

现在，让任意$\triangle ABC$的边$BC$的中点与$K$的中心$O$点重合（图234）。$BC$的（欧几里得的）垂线$OP$也是它在双曲意义下的垂线。$\triangle ABC$的中位线$DE$在双曲意义下与$OP$垂直，在欧几里得意义下它们也是垂直的。由此推出四边形$BCED$是一个欧几里得的梯形。根据§1的问题2中的定理，$\triangle ABC$的中线$AO, BE, CD$共点。

**106.** 这个命题不成立。为了说明这一点，只需考虑一个以圆盘$K$的中心$O$为中心的等边三角形（图235）。它的欧几里得的中线也是它的双曲的中线。此外，$d_{OA}\neq 2d_{OD}$，因为如果$\triangle ABC$的边的双曲长度无

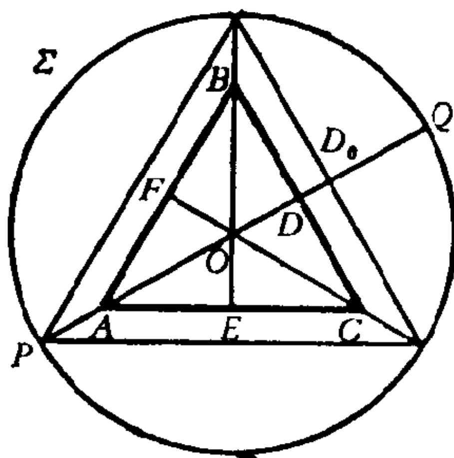


图 235

限增加（即它的顶点趋向于圆 $\Sigma$），则

$$d_{OD}\to d_{OD_0}=\log\left(\frac{OQ/D_0Q}{OP/D_0P}\right)=\log\left(\frac{2}{2/3}\right)=\log 3,$$

$$d_{OA}\to d_{OP}=\infty.$$

**注** 上面的论证表明，即使是对于等边三角形，中线的交点分中线$AD$之比$OA/OD$也不是一个常数，而与三角形的边的长度有关（这与下列事实有关：在双曲几何中不全等的等边三角形是不相似的；参看问题110后面的正文）。

107. 如果一个三角形两边的垂直平分线交于点$O$，则第三边的垂直平分线也经过$O$点；这个事实的证明和通常的证明沒有差别（参看第147页中双曲的三角形的角平分线共点的证明）．现在假设边$AB$和$BC$的垂直平分线$KL$和$MN$是超平行的，即它们有一条公垂线 $PQ$[图 236(a)]。则可以证明边$AC$的垂直平分线 $RS$也垂直于 $PQ$（从图 236(a)可以直接看到$RS$与$PQ$相交)。事实上，对于直线$PQ$作垂线$AA_1$，$BB_1$，$CC_1$。直角三角形$AKL$和$BKL$全等（直角边全等判别法），所以 $AL=BL$，$\delta_{ALK}=\delta_{BLK}$，$\delta_{ALA_1}=\delta_{BLB_1}$。由此推出直角三角形$ALA_1$和$BLB_1$全等（斜边、锐角全等判别法）．因此$AA_1=BB_1$。同理可证$BB_1=CC_1$。所以$AA_1=CC_1$。此外，直角三角形$ARS$和$CRS$全等（直角边全等判别法），所以$AS=CS$，$\delta_{ASR}=\delta_{CSR}$。再有，直角三角形$ASA_1$和$CSC_1$全等（直角边、斜边全等判别法），所以 $\delta_{ASA_1}=\delta_{CSC_1}$。现在我们有

$$\delta_{RSA_1}=\delta_{RSA}+\delta_{ASA_1}=\delta_{RSC}+\delta_{CSC_1}=\delta_{RSC_1}.$$

这说明$RS$与$PQ$垂直。

最后，考虑边$AB$和 $BC$的垂直平分线$UP$和$VP$平行的情形[图236(b)]。在那时边$AC$的垂直平分线$QT$必与 $UP$和$VP$

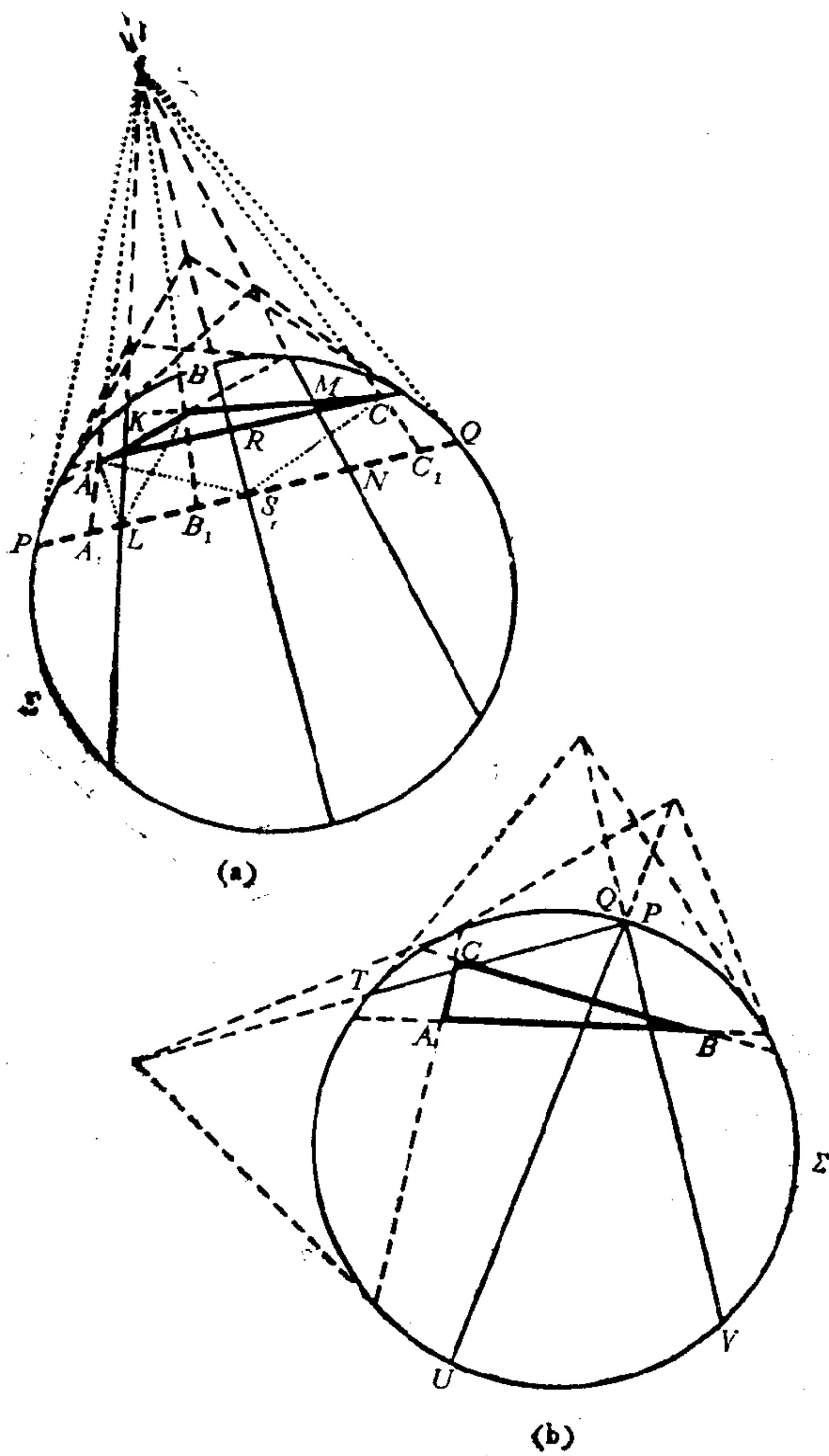



图 236

平行（因为如果，譬如说，$UP$和$QT$超平行，则根据上面的证明，$UP$ 和 $VP$也超平行）。从图 236(b)显然可以看到$QT$和$UV$不重合。由此也可以推出，在这时直线 $UP, VP, QT$属于同一个束。

108. (a) 将$\triangle ABC$的角平分线的交点（参看第147页）移到$\boldsymbol{K}$的中心$O$点（图 237）。则在欧几里得的和双曲的意义下，角$OAB, OAC, OBA, OBC, OCA, OCB$都是锐角。因此$\delta_A<\angle A$，$\delta_B<\angle B$，$\delta_C<\angle C$（参看第144页）。因此

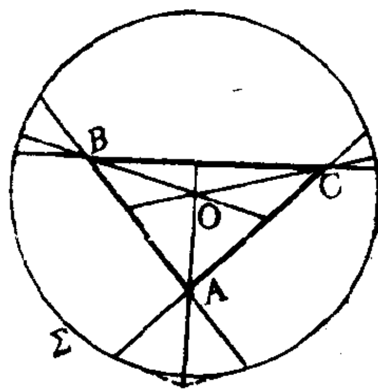


图 237

$$\delta_A+\delta_B+\delta_C<\angle A+\angle B+\angle C=180°,$$

这就是我们所要证明的。

(b) 首先，我们可以证明：***每个 $n$ 角形可以用不相交的对角线分成$n-2$个三角形***。由于每个非欧几里得的多角形是包含在圆盘$\boldsymbol{K}$内部的欧几里得的多角形，只要对欧几里得的多角形证明这个结论就够了（对于凸多角形这个证明是显然的；参看图238(a)）。

现在来证明，每个 $n$ 角形$\boldsymbol{M}$ ($n>3$) 可以分成两个较小的多角形。设$A$是$\boldsymbol{M}$的一个顶点，$AB$和$AC$是从$A$点出发的边。考虑$\boldsymbol{M}$内部以$A$为端点的所有线段[图238(b),(c)]。如果其中有一个线段是$\boldsymbol{M}$的对角线$AK$[图238(b)]，则$AK$将$\boldsymbol{M}$分成两个较小的部分。如果这些线段中不包含对角线，即它们的端点都属于$\boldsymbol{M}$的某一条边[图 238(c)]，则对角线 $BC$与所有这些线段相交，所以 $BC$整个地在$\boldsymbol{M}$的内部；从而$BC$把

$M$分成两个较小的多角形。

大家可以看到，用刚才所讲的方法能够将$M$分成三角形。如果将$M$剖分成三角形要用$k$条对角线，则这些三角形的数目是$k+1$。这$k+1$个三角形有$3(k+1)$条边，其中$n$条是$M$的边，$2k$条是对角线（每一条对角线是两个三角形的公共边）。因此

$$3(k+1)=n+2k, \qquad k=n-3,$$

从而可知$M$剖分成$k+1=n-2$个三角形。因为$n-2$个三角形中每一个的内角和小于180°（参看(a)），所以这个$n$角形的内角和小于$(n-2)\cdot 180°$。这就是我们所要证的。

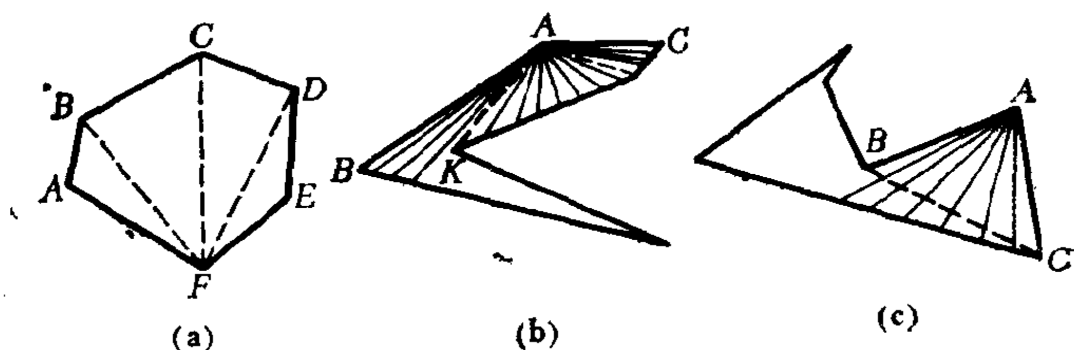



图 238

109. 设$S(M)$是与多角形$M$相对应的一个非负数。如果$S(M)$是$M$的面积，则自然要求它满足下列条件①：

1° 假若多角形$M_1$和$M_2$全等，则$S(M_1)=S(M_2)$。

2° 假若$M$是两个不相交的多角形$M_1$和$M_2$的并集（即$M$可以分成没有公共内点的两个多角形部分$M_1$和$M_2$），则$S(M)=S(M_1)+S(M_2)$。

3° 对某一个多角形$M_0$，有$S(M_0)=1$②。

---

① 反之，如果$S(M)$满足条件1°—3°，则它是$M$所对应的面积。

② 这个条件确定面积的一个“单位”。

显然，双曲的多角形的角亏（参看第156页）满足第一个条件。我们来证明它也满足第二个条件。实际上，假若多边形 $\boldsymbol{M}$ 用一条折线 $AB$ 剖分成一个 $k$ 角形 $\boldsymbol{M}_1$ 和一个 $l$ 角形 $\boldsymbol{M}_2$（图239），可以证明 $\boldsymbol{M}$ 的角亏是 $\boldsymbol{M}_1$ 的角亏与 $\boldsymbol{M}_2$ 的角亏之和。假设折线 $AB$ 有 $m$ 节（即除 $A$ 和 $B$ 外，还有 $m-1$ 个中间的顶点）。为了确定起见，假设 $A$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的一个顶点重合，而 $B$ 在 $\boldsymbol{M}$ 的一条边上（所有其它的情形与这种情况完全类似）。则有

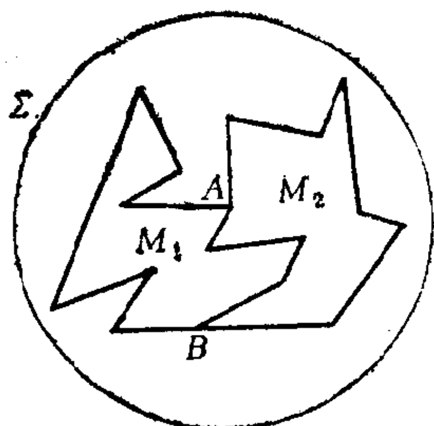



图 239

$$k+l=n+2m+1;$$

因为在 $\boldsymbol{M}_1$ 的 $k$ 个顶点和 $\boldsymbol{M}_2$ 的 $l$ 个顶点的总数中，包含 $\boldsymbol{M}$ 的 $n$ 个顶点和 $2m+1$ 个多算了的顶点（折线 $AB$ 的每一个中间的顶点和它的顶点 $B$ 在总数 $k+l$ 中都算了两次，并且都没有算在 $n$ 中；顶点 $A$ 在总数 $k+l$ 中算了两次而在 $n$ 中已经算了一次）。其次，如果用 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}$ 分别表示多角形 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}$ 的内角和，则

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}+(2m-1)180^\circ;$$

因为和 $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ 中除了包含 $\boldsymbol{A}$ 中的角以外，还包含折线 $AB$ 的非端点的顶点处的 $m-1$ 个 $360^\circ$ 角，以及在它的顶点 $B$ 处的一个 $180^\circ$ 角。所以

$$[(k-2)180^\circ-\boldsymbol{A}_1]+[(l-2)180^\circ-\boldsymbol{A}_2]$$
$$=(k+l-4)180^\circ-(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)$$

$$= (n+2m-3)180^\circ - \boldsymbol{A} - (2m-1)180^\circ$$
$$= (n-2)180^\circ - \boldsymbol{A}.$$

这就是我们所要证的。

由于多角形的角亏满足上述条件1°和2°，它必定与多角形的面积函数成正比（如果 $\boldsymbol{M}_0$ 的角亏是 $1/k$，则任意多角形的角亏等于它的面积除以 $k$）[1]。

**注 1** 上面的论证表明，双曲的三角形的面积不能任意大（因为角亏不能超过180°）。面积最大的三角形（其面积等于 $k\cdot180^\circ$，$k$ 是问题109中的比例常数）是它的边两两平行的"三角形"（图240(a)；而图240(b)是这种三角形的象正文中的图115和118那样的示意图）。

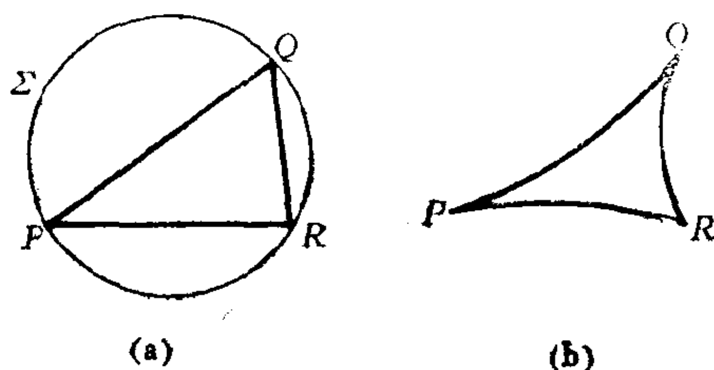
**注 2** 多角形的角亏与它的面积成正比，这个事实的证明在欧几里得几何中也成立；然而，在那里比例因子是零（在欧几里得几何中 $n$ 角形的角亏是零，因为它的内角和是 $(n-2)\cdot180^\circ$）．由此可知前面的讨论在欧几里得几何中没有意义；在那里计算一个多角形的面积要经过一个复杂得多的过程。即使三角形的用它的边长和角度给出的面积公式也远比它的双曲模式复杂，至于对 $n>3$ 的 $n$ 角形，在欧几里得几何中没有一个用它的边和角表示面积的一般的明显表达式。

有意思的是，注意上面给出的证明可以搬到球面几何中去（在那里一个多角形是球面上由大圆弧所围的部分；在球面几何中的大圆和在平面上的直线起相同的作用）．一个球

---

① 这并不是显然的．对于波里亚的这个著名的定理的证明，可以看，例如，E.D.Moise, Elementary Geometry from an Advanced Standpoint (Addison Wesley Publishing Co., Reading, 1963), 从p.345起．——英译者

面 $n$ 角形的角亏总的负的，从存在三个角都是直角的球面三角形这一事实就可以预料到这一点。由此推出在这里（角亏和面积之间的）比例常数应当是负的。我们可以说，**球面 $n$ 角形的面积同它的内角之和与 $(n-2)180^\circ$ 之差成正比**（这个差数称为球面 $n$ 角形的角盈）。这也可参看第二章[①]附录。




(a)　　　(b)

图 240

110．设 $ABC$ 和 $A'B'C'$ 是两个双曲的三角形，它们的三对对应角分别全等，并设 $C$ 和 $C'$ 是这两个三角形的最大的角。高线 $CH$ 和 $C'H'$ 穿过各自的三角形的内部（因为根据问题108(a)中的定理，角 $A$ 和 $A'$，$B$ 和 $B'$ 都是锐角；详细的说明可以看问题104的解的开头一段）。如果我们知道 $AH=A'H'$，就可以推出直角三角形 $AHC$ 和 $A'H'C'$ 全等（直角边、锐角判别法）。从而 $CH=C'H'$，并且直角三角形 $BHC$ 和 $B'H'C'$ 全等（直角边、锐角判别法）。由此可以知道 $\triangle ABC$ 和

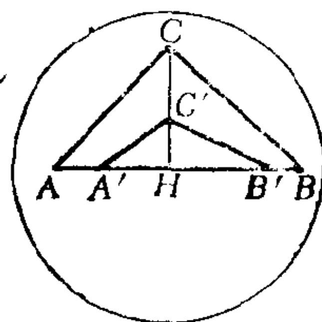



图 241

① 参看《几何变换》第四册。——英译者

$\triangle A'B'C'$ 全等. 所以,我们只需要证明: 如果 $AH \neq A'H'$,就会导致矛盾。为了确定起见,假设 $AH > A'H'$。移动两个三角形(利用双曲运动)使得点$H$ 和 $H'$ 与 $K$ 的中心重合,并且直线 $AB$ 和 $A'B'$ 重合.(图241)。由于$AH > A'H'$,并且 $\delta_A = \delta_{A'}$,可知 $\angle A > \angle A'$ (参看第144页).所以 $HC > HC'$,$\angle HCA < \angle HC'A'$。从后一式可以推出 $\delta_{HCA} < \delta_{HC'A'}$.如果有 $HB' < HB$,我们可以用类似的方法证明 $HC' > HC$,它与上面得到的不等式 $HC > HC'$ 矛盾。因此 $HB > HB'$,并且如上有 $\delta_{HCB} < \delta_{HC'B'}$。所以

$$\delta_C = \delta_{HCA} + \delta_{HCB} < \delta_{HC'A'} + \delta_{HC'B'} = \delta_{C'},$$

这与等式 $\delta_{C'} = \delta_C$ 矛盾。

**111.** 作 $\triangle ABC$ 的边 $AB$ 和 $AC$ 的垂直平分线 $KL$ 和 $MN$,并经过 $\triangle ABC$ 的顶点作直线 $AA_1, BB_1, CC_1$,它们同直线 $KL$ 和 $MN$ 属于同一个束(根据 $KL$ 与 $MN$ 是相交、超平行还是平行,直线 $AA_1, BB_1, CC_1$ 经过它们的交点、垂直于它们的公垂线、或和它们平行;图242)。从问题101(b)中的定理,可以知道

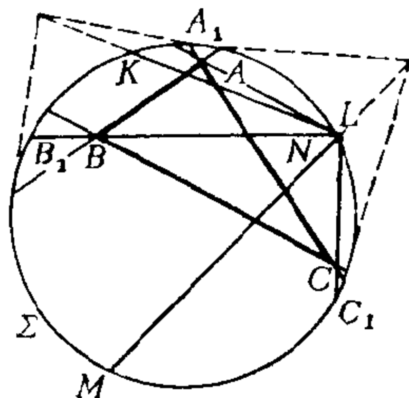


图 242

$KL$ 是直线 $AA_1$ 和 $BB_1$ 的对称轴,而 $MN$ 则是直线 $AA_1$ 和 $CC_1$ 的对称轴。这说明$\triangle ABC$ 的所有顶点在一个圆(或等距曲线,或极限圆)上,这个圆(或等距曲线,或极限圆)是在由 $KL$ 和 $MN$ 所确定的束中的每一条直线 $l$ 上选取一个点所组成的,这个点与$A$关于 $AA_1$ 和 $l$ 的对称轴相对称(看第159—162页)。

容易看到，在前面讨论中所设想的各种可能性实际上都有可能出现；最后，在一个圆、或等距曲线、或极限圆中有可能内接任意多个三角形。(同样容易看到，这些可能性是互相排斥的。如果有可能作$\triangle ABC$的外接圆，则存在与它的各个顶点等距离的点$O$，并且直线$KL$和$MN$必定交于$O$点。类似地，可以证明：如果能够作$\triangle ABC$的外接等距曲线，则$KL$和$MN$必定有一条公垂线；最后，如果能够作$\triangle ABC$的外接极限圆，则$KL$和$MN$必定平行。)

112. 考虑半径分别为$r_1$和$r_2$的两个双曲圆$S_1$和$S_2$，以及$S_1$的外切正六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$和$S_2$的内接正六边形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$①．设$s_1$和$s_2$分别表示这两个圆的双曲

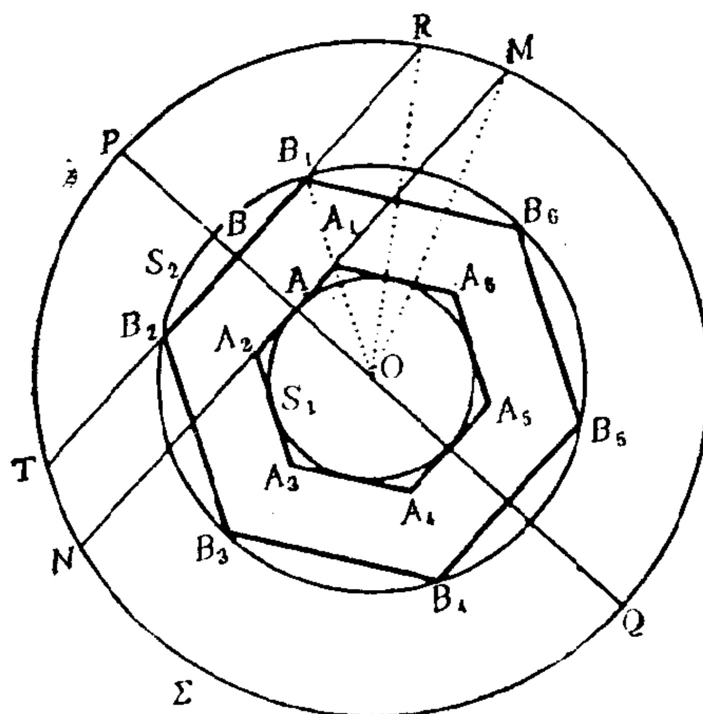


图 243

① 在双曲几何中，正六边形的定义和欧几里得几何中的定义相同。大家注意，在双曲几何中并不总是可以作圆的外切正六边形的，这个事实限制了$r_1$的大小。

的周长，$p_1$ 和 $p_2$ 表示这两个六边形的周长。则

$$\frac{s_1}{r_1} < \frac{p_1}{r_1}, \qquad \frac{s_2}{r_2} < \frac{p_2}{r_2}.$$

因此，如果我们可以选取 $r_1$ 和 $r_2$，使得 $p_1/r_1 < p_2/r_2$，则由此可以推出 $s_1/r_1 < s_2/r_2$，这就证明了问题的结论。

如果 $S_1$ 和 $S_2$ 的中心与 $\boldsymbol{K}$ 的中心 $O$ 点重合，则这两条曲线就是欧几里得的圆（图243）。假设它们的欧几里得的半径分别是 $a_1$ 和 $a_2$（圆盘 $\boldsymbol{K}$ 的半径取作单位长）。则有

$$r_1 = \log\left(\frac{OP}{AP} \Big/ \frac{OQ}{AQ}\right) = \log\frac{AQ}{AP} = \log\frac{1+a_1}{1-a_1},$$

$$r_2 = \log\frac{1+a_2}{1-a_2},$$

$$AA_1 = a_1\sqrt{3}/3, \qquad b_1 = AM = \sqrt{1-a_1^2},$$

$$d_{AA_1} = \log\left(\frac{AM}{A_1M} \Big/ \frac{AN}{A_1N}\right)$$

$$= \log\frac{A_1N}{A_1M} = \log\frac{b_1 + a_1\sqrt{3}/3}{b_1 - a_1\sqrt{3}/3},$$

$$p_1 = 12d_{AA_1},$$

$$BB_1 = a_2/2, \quad OB = a_2\sqrt{3}/2, \quad b_2 = BR = \sqrt{1-3a_2^2/4},$$

$$d_{BB_1} = \log\left(\frac{BR}{B_1R} \Big/ \frac{BT}{B_1T}\right)$$

$$= \log\frac{B_1T}{B_2T} = \log\frac{b_2 + a_2/2}{b_2 - a_2/2},$$

$$p_2 = 12d_{BB_1}.$$

特别地，如果 $a_1=0.1$，$a_2=0.9$，则

$$r_1=\log(1.1/0.9)\approx 0.08715,$$

$$r_2=\log(1.9/0.1)\approx 1.27875,$$

$$a_1\sqrt{3}/3\approx 0.05774, \qquad b_1\approx 0.99499,$$

$$d_{AA_1}\approx\log(1.05273/0.93725)\approx 0.05046,$$

$$p_1\approx 0.6055,$$

$$b_2\approx 0.6265, \quad d_{BB_1}\approx\log(1.0765/0.1765)\approx 0.78627,$$

$$p_2\approx 9.435.$$

因此

$$\frac{s_1}{r_1}<\frac{p_1}{r_1}<7 \quad 和 \quad \frac{s_2}{r_2}>\frac{p_2}{r_2}>7.$$

**注** 可以证明，在双曲几何中圆的周长和它的半径 $r$ 之比 $S/r$ 随 $r$ 递增。特别，若 $r\to 0$，则 $S/r\to\pi=3.14159\cdots$；又如 $r\to\infty$，则 $S/r\to\infty$ .